


11
4
180
BIBLIOTECA NAZIONALE
CENTRALE FIRENZE



LEÇONS ÉLÉMENTAIRES D'ARITHMÉTIQUE ET D'ALGÈBRE.

LEÇONS

ÉLÉMENTAIRES

D'ARITHMÉTIQUE

ET D'ALGÈBRE;

Par P. TEDENAT,

Associé de l'Institut national de France, Professeur de Mathématiques à l'École centrale du Département de l'Aveyron.

A RODEZ, CHEZ L'AUTEUR;

Et à PARIS,

Chez DUPRAT, Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins.

AN SEPTIÈME.

AVERTISSEMENT.

Il existe plusieurs Livres très-estimables sur la partie élémentaire des Mathématiques, lesquels ont parfaitement atteint le but d'utilité que s'étoient proposé leurs Auteurs. Mais en rendant justice au mérite de ces ouvrages, je ne puis me dissimuler qu'ils laissent quelque chose à desirer depuis les heureux changemens introduits dans le mode de l'instruction publique. C'est pour cette raison que je me suis déterminé à mettre au jour de nouveaux élémens qui, renfermant dans des limites assez étroites tous les principes de la science, pussent en même temps s'adapter spécialement à l'enseignement des *Ecoles centrales*. D'ailleurs, depuis que les plus célèbres Géomètres ont dirigé leur attention vers les élémens même des Mathématiques, ils les ont enrichis de plusieurs belles découvertes qu'il importe de faire connoître; et qui n'ont pu être exposées dans les livres qui ont paru avant cette époque.

Ce volume est divisé en deux parties; l'Arithmétique et l'Algèbre. L'Arithmétique, qui est la base de toutes les autres branches des Mathématiques, est traitée avec tout le détail qu'exige son importance. Je me suis attaché à expliquer

les principes généraux de la numération, et leur application au systême décimal en particulier. La connoissance du nouveau systême métrique étant aujourd'hui d'un intérêt général, je n'ai rien négligé de ce qui pouvoit en préparer l'intelligence; c'est pourquoi j'ai beaucoup insisté sur les propriétés des fractions décimales. Viennent ensuite quelques légères notions sur les fractions continues, qui m'ont paru indispensables d'après les nombreuses applications qu'on en a faites dans divers points d'analyse. Du reste, cette théorie est traitée plus à fond dans l'Algèbre. Les rapports, les proportions, les progressions et les règles qui en dérivent sont démontrés d'une manière rigoureuse, et présentent un ensemble qui ne peut être que très-utile aux jeunes gens qui se destinent au commerce. À la théorie des progressions se lie naturellement celle des logarithmes, que j'ai exposée avec tous les développemens nécessaires pour l'appliquer aux opérations numériques.

La première partie de l'Algèbre comprend les opérations fondamentales du calcul algébrique expliquées avec clarté et précision. La seconde, connue sous le nom d'*Analyse*, consiste dans l'application de ces opérations à la recherche des quantités inconnues qui se présentent dans la solution des divers problêmes, et constitue proprement l'art de résoudre les équations. De la

théorie des fractions continues, j'ai déduit les principes de l'analyse indéterminée. J'ai exposé succinctement le procédé de la solution des problêmes indéterminés du second degré. J'ai renvoyé à la fin de l'Algèbre les suites qui tirent leur origine de la division algébrique, et qui donnent naissance à la méthode des coefficiens indéterminés, méthode qui est d'un usage universel dans l'analyse. Je termine mon travail par des opérations générales sur les différens systêmes de numération, et sur quelques propriétés remarquables des nombres.

Je me propose de faire succéder incessamment à cet ouvrage de nouveaux Élémens de Géométrie et de Trigonométrie, et par la suite un Traité de Courbes et d'Analyse infinitésimale, qui formera, avec les ouvrages précédens, un Cours complet de Mathématiques.

ERRATA.

PAGE 8, ligne 19, sept par 15; *lisez* sept par 13.
Page 80, lig. 28, 642; *lisez* 542.
Page 81, lig. 20, il; *lisez* elle.
Page 142, lig. 5 de la note, 2,118287; *lisez*, 2,718287.

LEÇONS

LEÇONS ÉLÉMENTAIRES

DE MATHÉMATIQUES.

1. Les Mathématiques sont une science qui a pour objet les propriétés de la grandeur qui peuvent être calculées ou mesurées.

Le mot *mathématique* vient du grec, et signifie *science*, parce qu'en effet on peut regarder les mathématiques comme étant la science par excellence, puisqu'elles renferment les seules connoissances certaines accordées à nos lumières.

2. On appelle grandeur ou quantité, tout ce qui peut être augmenté ou diminué, comme l'espace ou l'étendue, la durée ou le temps, le mouvement, le poids, la lumière.

3. La grandeur ou quantité est susceptible d'augmentation ou de diminution sans fin; c'est-à-dire, que quelque grande, ou quelque petite que soit une quantité, on peut en concevoir, par la pensée, une plus grande, ou plus petite. Ses accroissemens ou ses décroissemens n'ont pas de bornes, ou, si l'on veut, n'ont d'autres bornes que l'*infini* et l'infiniment petit. Ni l'une ni l'autre de ces limites ne peuvent être considérées comme des quantités réellement existantes, mais seulement comme le terme auquel tendent toutes les quantités finies, sans jamais pouvoir y arriver, et dont on peut supposer qu'elles ne diffèrent que d'une quantité plus petite que toute grandeur assignable.

4. La grandeur peut être considérée sous deux différens rapports ; savoir, d'une manière abstraite, ou d'une manière concrète.

La grandeur abstraite est celle dont la notion ne désignant aucun sujet particulier, convient également à tout ce qui est composé de parties.

La grandeur concrète est celle dont la notion renferme l'idée d'un sujet particulier tellement déterminé, qu'on ne puisse pas le confondre avec un autre.

Sous ces deux points de vue, elle est calculable ou mesurable. Dans le premier cas, elle est représentée par des nombres ; dans le second, par l'étendue. La grandeur, en tant que calculable, est l'objet de l'arithmétique ; en tant que mesurable, elle est l'objet de la géométrie : sous l'un et l'autre rapport, elle est l'objet de l'algèbre.

5. L'arithmétique et la géométrie sont le fondement de toutes les sciences qui traitent des grandeurs : Platon les appeloit les deux ailes des mathématiques. En effet, toutes les fois qu'en considérant, par le moyen de l'algèbre, les propriétés générales des nombres, on sera parvenu à un résultat, pour pouvoir en faire usage, il est nécessaire de le traduire en nombres ou en lignes. Pour le traduire en nombres, on a besoin du secours de l'arithmétique ; pour le traduire en lignes, on a besoin du secours de la géométrie.

L'arithmétique, l'algèbre et la géométrie étant la base des mathématiques, c'est par elles qu'il convient de commencer l'étude de cette science.

PREMIÈRE PARTIE.

DE L'ARITHMÉTIQUE.

6. Le mot *arithmétique* vient du grec, et signifie *nombre.* L'arithmétique est donc, selon l'étimologie du mot, la science des nombres.

7. On entend en général, par nombre, l'assemblage, ou la collection de plusieurs unités de même nature. Euclide conclut de cette définition, que l'unité ne doit pas être mise au rang des nombres, et que par conséquent, le premier et le plus petit de tous les nombres est deux.

8. L'unité mathématique est tout ce qui peut être pris pour mesure, ou pour terme de comparaison, dans l'expression des grandeurs.

Pour avoir donc une idée exacte d'un nombre, il faut avoir, 1°. l'idée de l'unité; 2°. savoir combien de fois le nombre proposé contient l'unité.

9. On distingue deux sortes d'unités, l'unité abstraite et l'unité concrète.

L'unité abstraite est l'idée d'une grandeur indéterminée et dépouillée de toutes les qualités sensibles; c'est l'idée d'une chose qui n'existe que dans notre entendement: et le nombre abstrait est l'assemblage de plusieurs unités abstraites. Ainsi les nombres trois ou trois fois, cinq ou cinq fois, sont des nombres abstraits.

L'unité concrète est l'idée d'une grandeur particulière et déterminée, revêtue de qualités sensibles qui constituent sa nature; et le nombre concret est

la collection de plusieurs unités concrètes. Ainsi trois toises, quatre jours, &c. sont des nombres concrets.

Le nombre abstrait est l'expression d'une comparaison établie entre deux grandeurs, dont une est prise pour l'unité : il exprime combien de fois celle-ci est contenue dans la première. C'est ce qu'on appelle le *rapport* ou la *raison* d'une grandeur à une autre. Ainsi le nombre trois ou trois fois, exprime combien de fois la grandeur trois contient la quantité de même nature désignée par un.

10. En général, nous ne connoissons les propriétés de la grandeur (on pourroit même dire de tous les êtres existans ou possibles) que par les rapports qu'elles ont entr'elles; et les signes dont on se sert pour désigner ces propriétés, ne sont que l'expression du rapport. L'idée du rapport est donc une des idées les plus simples que nous puissions avoir sur les propriétés de la grandeur, car c'est la seule connoissance que l'on puisse acquérir en les comparant entr'elles. Nous pouvons donc dire avec *Newton*, que les nombres ne sont que des rapports apperçus par l'esprit, et distingués par des signes particuliers; et l'arithmétique qui est la science des nombres, est l'art d'exécuter, par des opérations techniques très-simples, des calculs auxquels l'intelligence humaine, livrée à elle-même, ne sauroit atteindre.

L'idée de considérer les nombres comme l'expression d'un rapport, paroîtra peut-être trop abstraite pour être placée à la tête d'un ouvrage élémentaire; mais elle n'en est pas moins une idée fondamentale de la science des nombres, et nous aurons occasion de la rappeler souvent, pour écarter quelques difficultés que présente l'énoncé de plusieurs questions que nous aurons à traiter.

Explication des signes dont on fait usage dans toutes les parties des mathématiques.

11. Le signe $=$ est le signe dont on se sert pour marquer que des quantités qu'on compare sont égales : ainsi $A=B$ signifie que A égale B.

Le signe $+$ sert à marquer l'addition des quantités, et se prononce *plus :* ainsi $A+B$ représente la somme des quantités A et B, et se prononce A plus B.

Le signe — marque la soustraction, et se prononce *moins* : ainsi $A-B$ se prononce A moins B.

Le signe $\times$ indique la multiplication : ainsi $A\times B$ représente la multiplication de A par B. Au lieu du signe $\times$, on emploie quelquefois un point : ainsi $A.B$ est la même chose que $A\times B$.

Le signe $>$ signifie *plus grand*, et le signe $<$ signifie *plus petit*, ou *moindre :* ainsi $A>B$ marque que A est plus grand que B, et $A<B$ exprime au contraire que A est plus petit que B.

Principes généraux de la numération.

12. La première chose qu'il a fallu faire en arithmétique, a été de pouvoir exprimer d'une manière simple tous les nombres possibles.

Si pour chaque nombre il avoit fallu un signe particulier, la mémoire eût été bientôt surchargée de ce grand nombre de signes, et l'arithmétique seroit restée très-imparfaite, parce qu'en général nos connoissances ne peuvent se perfectionner que par le rapprochement des idées que les signes fixent dans la mémoire. Si au contraire on pouvoit exprimer tous les nombres possibles avec un petit nombre de caractères, la combinaison des rapports seroit plus facile à exécuter et à retenir.

13. Dans tous les systêmes de numération, pratiqués depuis long-temps par tous les peuples commerçans, les signes numériques ne vont que jusqu'à neuf. On a d'abord exprimé avec ces signes particuliers, les neuf premiers nombres. Voici la figure et le nom de ces neuf chiffres qu'on nomme arabiques, parce qu'ils nous ont été transmis par les Arabes :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
un,	deux,	trois,	quatre,	cinq,	six,	sept,	huit,	neuf.

Une fois parvenu là, on a eu l'idée très-heureuse de donner à ces caractères, outre leur valeur absolue, une valeur dépendante de leur position.

14. Le caractère 1 qui représente l'unité, exprime, en l'avançant d'un rang vers la gauche, une unité du second ordre, ou une dixaine ; et pour lui donner ce rang, on a imaginé un caractère qui n'a pas de valeur, et qui ne sert qu'à fixer la position des autres caractères : ce caractère est o, qu'on nomme *zéro*. Ainsi 10 ou l'unité suivie d'un zéro, exprime alors la collection de dix unités, ou une dixaine.

Le caractère 2, suivi d'un zéro, exprime deux dixaines, ou deux unités du second ordre. Il en est de même pour les autres caractères ou chiffres.

15. On peut aussi exprimer, de la même manière, des unités du troisième ordre, ou des centaines; il a suffi de mettre deux zéros à la suite des caractères significatifs. Des dixaines de centaines, ou des milles ont été exprimées avec trois zéros placés à la droite des mêmes caractères, et ainsi de suite. De cette manière, on a pu exprimer tous les nombres ; car tout nombre, en général, est composé d'unités, de dixaines, de centaines, de milles, &c. et s'il manque dans le nombre qu'on veut écrire, quelques unités d'un ordre intermédiaire, on met

à leur place un zéro, pour conserver le rang et la valeur des chiffres significatifs qui précèdent. Ainsi, pour exprimer trois cent quarante mille six cent cinq, on écrit 340605.

C'est ainsi que par cette idée ingénieuse de donner aux caractères deux valeurs, l'une dépendante de la forme des chiffres, et l'autre dépendante du rang qu'ils occupent, on est parvenu, avec dix caractères, dont le dixième sert uniquement à marquer le rang, à écrire tous les nombres possibles.

16. Ces principes métaphysiques étant purement arbitraires, rien n'obligeoit de s'en tenir à dix caractères : on auroit pu en employer plus ou moins, et en augmentant ou en diminuant le nombre des chiffres, on auroit aussi changé leur valeur dépendante du rang qu'ils occupent.

17. C'est ainsi qu'en n'admettant que deux caractères, o et 1, on auroit formé l'arithmétique binaire employée autrefois par les Chinois, et renouvellée dans ces derniers temps par Léibnitz. Une unité du second ordre auroit valu deux unités du premier ordre, et auroit été représentée par 10. Pour exprimer trois, on auroit écrit 11; quatre eût été exprimé par 100, cinq par 101, six par 110, &c.

Cette arithmétique auroit eu, d'un côté, l'avantage d'être fondée sur la série des chiffres la plus courte et la plus simple; mais elle auroit eu l'inconvénient d'employer un grand nombre de chiffres, pour exprimer de très-petits nombres.

18. Si on eût voulu former une arithmétique duodécimale, il eût fallu ajouter deux caractères nouveaux pour exprimer dix et onze. Sous ce rapport, cette arithmétique eût été moins simple que celle dont on se sert ordinairement; mais elle auroit eu l'avantage d'exprimer la moitié, le tiers, le quart

et le sixième de l'unité principale, au moyen des subdivisions de ce système (*a*). Ces fractions sont si naturelles, que dans presque tous les pays où l'on trouve le calcul décimal établi, on emploie néanmoins pour les besoins communs et usuels, le calcul duodécimal, c'est-à-dire qu'on compte par douzaines et par douzaines de douzaines ou grosses. Si on vouloit employer l'arithmétique trinaire, ou de trois chiffres, on n'auroit besoin que de 0, 1, 2; les unités du second ordre contiendroient trois unités du premier ordre. Ainsi, pour représenter trois, on écriroit 10; pour représenter quatre, on auroit 11; cinq seroit écrit 12, huit seroit représenté par 22, et ainsi des autres.

19. Dans l'arithmétique quaternaire on n'auroit besoin que de quatre chiffres 0, 1, 2, 3: les unités du second ordre contiendroient quatre unités du premier ordre. Ainsi quatre seroit représenté par 10, cinq par 11, sept par 13, neuf par 21, et ainsi des autres.

20. On pourroit même diminuer de moitié le nombre des signes, en introduisant dans les différens systêmes des signes négatifs.

Ainsi dans l'arithmétique ordinaire, on fera les mêmes calculs avec six chiffres, pourvu qu'on puisse

---

(*a*) Cet avantage se réduit à très-peu de chose lorsqu'on l'examine de près : des savans très-distingués, au lieu d'accorder une préférence à l'arithmétique dont le nombre 12 seroit la base, ont pensé qu'il y auroit au contraire de l'avantage à prendre pour base de l'arithmétique un nombre tel que 11 qui n'auroit aucun diviseur; ils se fondent sur ce que les rapports $\frac{1}{11}$, $\frac{2}{11}$, $\frac{3}{11}$, &c. sont simples et faciles à saisir, tandis que les rapports qu'ont entr'elles les fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$... ne s'apperçoivent pas aisément. (*Voyez le journal de l'Ecole normale*, DÉBATS).

les prendre négativement. En effet, pour marquer qu'ils sont pris négativement, marquons-les d'un point placé au-dessus du chiffre. On exprimeroit de cette manière $9 = 10 - 1$ par $1\dot{1}$, 8 seroit désigné par $1\dot{2}$, 7 par $1\dot{3}$, 6 par $1\dot{4}$... 16 par $2\dot{4}$, 17 par $2\dot{3}$, 18 par $2\dot{2}$, 19 par $2\dot{1}$... Pour désigner 60, on écriroit $1\dot{4}0$, $61 = 1\dot{4}1$.. $66 = 1\dot{3}\dot{4}$. &c. On pourroit donc compter ainsi jusqu'à 100; on compteroit de même depuis 100 jusqu'à 200. Pour marquer, par exemple, 158, on écriroit $2\dot{4}\dot{2}$.. &c.

L'idée de donner aux chiffres une valeur négative n'est pas nouvelle; on sait que les Romains, pour écrire $10 + 1$, écrivoient XI, et pour $10 - 1$, ils écrivoient IX, &c.

21. Après avoir examiné les avantages et les inconvéniens que présentent tous les systèmes d'arithmétique qu'on peut former, en n'employant pas un trop grand nombre de caractères, il paroît que le système duodécimal auroit dû mériter la préférence; mais le calcul décimal étant universellement adopté non-seulement de toute l'Europe, mais encore de toute la terre, il y auroit de l'inconvénient à le changer, et l'on a mieux aimé chercher à perfectionner celui qui est généralement répandu, que d'en introduire un que les préjugés de l'éducation et une habitude contraire auroient porté à repousser.

22. C'est cette perfection que la Convention nationale a eu en vue, lorsqu'elle a adopté le nouveau système des poids et mesures proposé autrefois par *Mouton*, astronome de Lyon (*a*), et renouvelé depuis par la ci-devant Académie des Sciences.

(*a*) Mouton a publié un opuscule intitulé : *Nova mensurarum geometricarum idea*, dans lequel il propose un système

Ce système consiste à adapter les divisions et subdivisions des mesures au système de numération généralement établi, en les faisant décroître en progression décimale. On peut consulter l'instruction publiée sur cet objet par la Commission des poids et mesures. Nous traiterons aussi cet article avec tout le détail convenable.

Au reste, l'expression d'un nombre étant donnée dans un système de numération, il est aisé de trouver son expression dans un autre système. Nous résoudrons ailleurs le problême : revenons au système décimal.

23. Nous avons vu de quelle manière on pouvoit écrire un nombre quelconque dans le système ordinaire de numération ; il nous reste à voir comment on peut énoncer un nombre écrit. On a d'abord désigné par un mot particulier, chacun des dix caractères dont nous avons parlé : ensuite de dix unités on a formé une dixaine.

Pour compter au-delà, il eût été plus simple de dire dix un, dix deux, dix trois, au lieu de onze, douze, treize, &c. ; mais on n'a commencé à compter ainsi qu'à dix-sept.

---

métrique décimal fondé sur la grandeur de la terre. La plus grande mesure de sa nomenclature, nommée *milliare*, est égale à une minute sexagésimale du méridien. Les autres vont en diminuant dans la raison sous-décuple; et pour donner le moyen de retrouver à volonté deux des mesures comprises dans cette nomenclature, qu'il appelle *virga* et *virgula*, il détermine le nombre des vibrations faites pendant un temps donné par des pendules simples de même longueur. L'évaluation absolue de son *milliare* est fondée sur la mesure erronée du méridien donnée par *Riccioli*. Mouton n'en connoissoit pas d'autre ; mais cette erreur de fait ne lui ôte rien de la gloire d'avoir le premier conçu l'idée d'un système de mesures semblable à celui que la France, sa patrie, a adopté environ cent vingt ans après. (*Journal Polytechnique.*)

Deux unités du second ordre, ou deux dixaines, ont formé le nombre *vingt ;* trois dixaines ont été appelées *trente ;* quatre dixaines, *quarante*, et ainsi jusqu'à *soixante*. Au-delà, on dit *soixante-dix, quatre-vingt, quatre-vingt-dix*, ou, ce qui est plus simple, *septante*, *octante*, *nonante*.

Dix dixaines ont été nommées *cent*, et dix centaines ont été nommées *mille*.

Au-delà, on n'a employé de nouveaux mots que de mille en mille, mille fois mille ont été nommées *million ;* mille millions ont été nommés *billions* ou *milliard*, et ainsi de suite ; de sorte que quand un nombre est écrit, pour le dénommer il faut le partager en tranches de trois chiffres chacune, en allant de droite à gauche. Les chiffres compris dans la première tranche, n'expriment que des unités, des dixaines, des centaines simples, sans aucune autre dénomination. Dans la seconde classe, ce sont des unités, des dixaines, des centaines de mille ; la troisième exprime des millions, la quatrième des billions, ensuite des trillions, des quatrillions, &c.

Il est à remarquer ici que les chiffres qui vont en augmentant de la droite vers la gauche, s'énoncent en allant de la gauche vers la droite. En voyant les chiffres 538, on ne dit pas *huit*, *trente*, et *cinq cents*, mais *cinq cent trente-huit*. Si l'on avoit à énoncer 473, 503, 462, on sépareroit les tranches par des virgules, et l'on prononceroit quatre cent septante-trois *millions* cinq cent trois *mille* quatre cent soixante-deux *unités*.

Des opérations de l'Arithmétique.

24. Toutes les opérations qu'on peut faire sur la grandeur ne peuvent tendre qu'à l'augmenter ou à la diminuer. Il ne doit donc y avoir dans l'arithmé-

tique que deux sortes de règles différentes, une qui se rapporte aux différentes manières d'augmenter, l'autre qui a rapport aux différentes manières de diminuer. La première comprend l'addition et la multiplication; la seconde, la soustraction et la division.

De l'Addition.

25. L'addition est une opération de l'arithmétique, par laquelle on ajoute ensemble plusieurs quantités de même nature, pour avoir un résultat qu'on appelle *somme.*

Il est évident, 1°. que les quantités ajoutées doivent être *homogènes* ou de même nature; car des quantités *hétérogènes* ou de nature différente, ne peuvent pas être comparées à une même unité, et par conséquent ne peuvent pas faire un même tout. 2°. Que pour faire l'addition des nombres composés d'un seul chiffre, on n'a besoin d'aucune règle particulière; les premiers principes de la numération suffisent, et cette première connoissance est la base de l'addition pour toutes sortes de nombres.

Je suppose donc qu'il soit question d'ajouter ensemble plusieurs nombres exprimés chacun par tant de chiffres qu'on voudra, on les écrira les uns au-dessous des autres, en plaçant dans une même colonne verticale les unités du même ordre. On fera l'addition des nombres de la colonne des unités; on ne placera sous la colonne des unités que le chiffre qui marque les unités simples, ou zéro, lorsqu'il n'y a pas d'unités simples dans la somme de la colonne; on retiendra les dixaines, pour les ajouter à la colonne suivante. Lorsqu'on aura opéré de la même manière sur toutes les colonnes, et qu'on aura écrit toutes les additions particulières, on aura

dans une même ligne horizontale la somme qu'on s'étoit proposé de trouver.

Exemple. On propose d'ajouter ensemble les quatre sommes suivantes. J'écris ces nombres comme on voit ici : j'ajoute ensemble les unités dont la somme est 17 ; j'écris 7 sous la colonne des unités, et je retiens une dixaine, pour l'ajouter avec la colonne des dixaines. Je prends la somme des dixaines qui est 19 : si on y ajoute la dixaine retenue sur la somme des unités, on aura 20; j'écris 0, et je retiens les vingt dixaines ou deux centaines, qui font deux unités de la colonne suivante. La somme de cette colonne, avec les deux retenus sur la colonne des dixaines, est 27. J'écris 7 sous la colonne des centaines, et je retiens deux mille, pour les porter sur la colonne suivante. La somme de cette colonne, avec les deux de retenus, est 17; j'écris 17, parce qu'il ne reste plus d'autre colonne à additionner, et l'opération est finie.

4563
7987
857
4300
17707

26. Ne pouvant pas saisir par une seule opération de l'esprit le résultat de ces quatre quantités ajoutées ensemble, on a cherché séparément la somme de chaque addition partielle dont est formée l'addition totale, et c'est en cela que consiste tout l'artifice de cette règle. Ajoutons encore quelques exemples :

3568	9735	83954
2036	430	27689
5709	79	36895
6832	406	45767
18145	5732	194305
	16382	

De la Soustraction.

27. La soustraction est une opération par laquelle on retranche une quantité d'une autre de même nature, pour déterminer de combien l'une surpasse l'autre.

Il est évident, 1°. que les deux quantités doivent être de même nature, car sans cela la plus petite ne seroit pas contenue dans la plus grande; donc elle ne pourroit pas en être retranchée; 2°. que pour trouver la différence de deux nombres exprimés par un seul chiffre, on n'a besoin d'aucune règle particulière. Les principes de la numération suffisent, et ces connoissances préliminaires sont indispensables pour faire la soustraction des grands nombres.

Je suppose donc qu'il soit question de soustraire un nombre d'un autre plus grand que lui : on écrira le plus petit au-dessous du plus grand, de manière que les chiffres de même nature soient dans une même colonne : on commence la soustraction par la droite, en retranchant le chiffre inférieur de la première colonne verticale du correspondant supérieur. Quand cette soustraction ne peut pas se faire, on ajoute dix au chiffre supérieur; mais quand on passe à la colonne suivante, on diminue d'une unité le chiffre du nombre supérieur, ou l'on augmente d'une unité le chiffre du nombre inférieur, ce qui donne deux méthodes pour parvenir au même but: on continue ainsi, en passant d'une colonne à l'autre.

Exemple. Soient les deux nombres ci-joints dont on demande la différence. Après avoir écrit le plus petit sous le plus grand, je retranche 7 de 6; cela ne se peut : j'ajoute dix au 6, et je retranche de 16, 7; il reste 9. Je passe à la colonne suivante, et je dis:

$$\begin{array}{r} 35216 \\ \underline{27897} \\ .7319 \end{array}$$

de 1 en retrancher 10, cela ne se peut ; j'ajoute 10 à 1, et je retranche 10 de 11, il reste 1. Je continue en disant, de 12 en retrancher 9, il reste 3 ; de 15 en retrancher 8, il reste 7 ; de 3 en retrancher 3, il reste zéro. La différence totale est donc 7319. On voit ici, comme dans l'addition, que tout l'artifice de cette règle consiste à obtenir, par des soustractions partielles, la différence totale qu'on pourroit trouver par une seule opération de l'esprit.

Il est visible, qu'au lieu d'augmenter le chiffre inférieur d'une unité, on peut le laisser tel qu'il est, et diminuer le chiffre supérieur de l'unité qu'on y a empruntée, pour la porter sur le chiffre précédent.

28. Si le chiffre sur lequel on doit emprunter est zéro, on empruntera sur le premier chiffre significatif qu'on trouvera à gauche, et tous les zéros intermédiaires se trouveront convertis en 9, comme nous allons l'expliquer dans l'exemple suivant :

Exemple. Soustraire 24567 de 30000 : les deux membres étant écrits comme on le voit ici, je ne puis pas retrancher 7 de 0 ; c'est pourquoi j'emprunte 1 sur le 3 : cette unité transportée sur le premier zéro à droite, vaut 10 ; mais si j'en emprunte 1 pour le porter sur le second zéro, il ne restera plus que 9 sur le premier, et il y aura dix sur le second. En empruntant 1 sur le 10, pour le porter sur le zéro suivant, il ne restera plus que 9 sur le zéro, et on aura 10 sur le troisième. En faisant toujours le même raisonnement, on verra que l'unité empruntée sur le premier chiffre significatif se trouvera décomposée de manière à laisser 9 sur chaque zéro intermédiaire, et à porter 10 sur le dernier à droite.

```
 9 9 9 10
 30000
 24567
 -----
 .5433
```

29. Il est quelquefois plus commode de convertir

la soustraction en une simple addition, ce qui se fait en prenant le complément du nombre inférieur, l'ajoutant avec le nombre supérieur, et diminuant d'une unité le dernier chiffre à gauche de la somme. Le complément d'un nombre est ce qui lui manque pour égaler 10, ou 100, ou 1000, &c. suivant que le nombre a 1 ou 2, ou 3 chiffres. Or pour prendre le complément total, il suffit de prendre le complément du premier chiffre qui doit être soustrait à 10, et celui des chiffres suivans à 9. Supposons, par exemple, que l'on ait 3459 à retrancher de 6327; au lieu de dire 9 de 7, cela ne se peut, j'emprunte une unité sur le 2, et je dis, 9 de 17 reste 8; ensuite, 5 de 11 reste 6; 4 de 12 reste 8; 3 de 5 reste 2, ce qui donne le reste total 2868; je dirai 1, complément de 9, et 7 font 8; j'écris 8: ensuite 4, complément de 5, et 2 font 6; je pose 6: 5, complément de 4, et 3 font 8; je pose 8: 6, complément de 3, et 6 font 12, je ne pose que 2, et j'ai 2868 comme par la méthode ordinaire.

La raison de cette opération n'est pas difficile à saisir; car il est visible que l'opération précédente consiste à ajouter 6541, complément de 3459, et à retrancher 10000. Or $10000 = 3459 + 6541$, donc c'est tout comme si de la somme première 6327 on ne retranchoit que 3459.

Preuves de l'addition et de la soustraction.

30. La preuve d'une règle, en général, est une opération que l'on fait, pour savoir si dans le cours du calcul il ne s'est pas glissé quelque erreur.

On s'assure qne l'addition a été bien ou mal faite par la soustraction. En effet, la somme totale doit être égale à la collection des sommes partielles; donc si de la somme totale je retranche la collection des sommes partielles, il doit rester zéro.

Pour

Pour faire cette soustraction, on ira de gauche à droite, en commençant par additionner la première colonne; on retranchera successivement chaque colonne de la somme correspondante, on écrira au-dessous chaque reste, s'il y en a, pour le convertir en unités de la colonne suivante. Si le dernier reste est zéro, ce sera la preuve que l'addition a été bien faite : ainsi dans l'exemple cité (25), on dira 4 et 7 font 11, et 4 font 15; de 17 je retranche 15, il reste 2; la somme de la colonne suivante est 25, qui retranchés de 27, laissent encore 2 : la somme de la colonne suivante est 19, retranchés de 20, il reste 1. La somme de la colonne suivante est 17, qui retranchés de 17 laissent zéro; d'où je conclus que l'addition est juste.

Quant à la preuve de la soustraction, elle se fait par l'addition. En effet, quand on a retranché une quantité d'une autre pour avoir la différence, il est évident que la plus petite quantité augmentée de la différence, doit égaler la plus grande. Donc en ajoutant le nombre soustrait avec le reste, si la somme égale le nombre supérieur, la soustraction est bonne, sinon elle est défectueuse. Ainsi, dans l'exemple cité (28), on a trouvé que 7 et 3 font 10, je pose zéro et je retiens 1. Toutes les autres colonnes, augmentées de ce que l'on aura retenu, donneront 10, et la dernière donnera 3 : donc la soustraction est juste.

De la Multiplication.

31. La multiplication est une opération par laquelle on prend un nombre qu'on appelle *multiplicande*, autant de fois que l'unité est contenue dans un autre nombre qu'on nomme *multiplicateur*, pour avoir un résultat qu'on appelle *produit*.

Il suit de cette définition, que le produit contient le multiplicande autant de fois que le multiplicateur contient l'unité, ou, ce qui est la même chose, il y a le même rapport entre le produit et le multiplicande, qu'entre le multiplicateur et l'unité.

Comme on ne peut comparer ensemble que des quantités homogènes, il s'ensuit que le produit est toujours de la nature du multiplicande, et le multiplicateur, de même nature que le terme qui sert d'unité de comparaison, ou plutôt le véritable multiplicateur est le rapport du multiplicateur donné comparé à l'unité. Il est donc un nombre abstrait.

Dans toute multiplication, le produit est donc de la nature du multiplicande, et le multiplicateur est toujours un nombre abstrait (*a*).

Le multiplicande et le multiplicateur sont aussi nommés les facteurs de la multiplication.

32. La multiplication n'est véritablement qu'une manière abrégée de faire l'addition; car, par exemple, pour multiplier 25 par 5, il faut prendre 25 cinq fois, ou ajouter 25 à lui-même cinq fois, comme dans l'exemple ci-joint. Mais on conçoit qu'une pareille manière de faire la multiplication seroit impraticable, si le multiplicateur étoit considérable; il a donc fallu chercher à l'abréger.

25
25
25
25
25
125

Nous distinguerons trois cas : ou les deux facteurs de la multiplication sont exprimés chacun par un seul chiffre, ou l'un d'eux étant toujours exprimé par un seul chiffre, l'autre en contient plusieurs;

(*a*) Rigoureusement parlant, le multiplicande est aussi un nombre abstrait; car il est toujours l'expression du rapport d'une grandeur comparée à son unité de mesure (10). Le produit sera donc toujours un nombre abstrait.

ou enfin ils sont exprimés l'un et l'autre par plusieurs chiffres.

33. *Premier cas.* Si le multiplicateur est un nombre simple, et le multiplicande un autre nombre simple, on ne peut pas prescrire de règles à suivre. Pour faire la multiplication, il faut savoir de mémoire la table de Pythagore, qui apprend à trouver sur-le-champ le produit d'un chiffre par un autre.

TABLE DE PYTHAGORE.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Cette table, comme on voit, est composée de neuf bandes horizontales, et chaque bande a neuf cases, determinées par des lignes verticales, qui coupent les horizontales. Les cases de la première bande contiennent la suite des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 : pareillement les cases de la première colonne verticale contiennent la suite des mêmes nombres. Si l'on prend un nombre dans la première bande horizontale, et un autre nombre dans la première colonne verticale, et qu'on multiplie ces deux nombres entre eux, le produit se trouvera dans la case commune à la bande horizon-

tale et à la colonne verticale. Veut-on, par exemple, multiplier 7 par 8, on cherchera le multiplicande 7 dans la bande horizontale, et le multiplicateur 8 dans la colonne verticale, et le produit 56 se trouvera dans la case commune. Ce seroit la même chose, si on avoit pris le 7 dans la colonne verticale, et le 8 dans la bande horizontale (*a*).

34. *Second cas.* Lorsque le multiplicande est un nombre composé et le multiplicateur un nombre simple, on écrit le multiplicateur sous le multiplicande, on tire une ligne horizontale, et l'on multi-

---

(*a*) Lorsque les deux facteurs ne passent pas 5, on est bientôt familiarisé avec leurs produits; il n'y a que les facteurs au-dessus de 5 qui donnent quelque peine aux commençans. Au défaut de la table de Pythagore, ils peuvent se servir de la règle suivante, plus curieuse qu'utile, mais dont le procédé est conforme aux principes de l'arithmétique.

Tenant d'abord les dix doigts des deux mains ouverts, on abaissera dans une main autant de doigts qu'il y a d'unités de différence entre 10 et le multiplicande; on abaissera dans l'autre main autant de doigts qu'il y a d'unités de différence entre 10 et le multiplicateur; la somme des doigts qui resteront ouverts, marquera les dixaines du produit; le nombre des doigts baissés dans une main, multipliés par le nombre des doigts baissés dans l'autre, donneront les unités du produit.

Par exemple, pour multiplier 8 par 7, abaissez deux doigts dans une main et trois dans l'autre, les cinq doigts levés marqueront cinq dixaines ou 50, et deux doigts baissés dans une main, multipliés par les trois baissés dans l'autre, donneront 6, donc $8 \times 7 = 56$.

La raison de ce procédé est que $8 = 10 - 2$, et $7 = 10 - 3$. La multiplication sera $10 \times 10 - 2 \times 10 - 3 \times 10 + 2 \times 3$, ou $10 \times (10 - 3 - 2) + 2 \times 3$, ou $10 \times 5 + 2 \times 3$; c'est-à dire que le produit sera 10 répété autant de fois qu'il y a de doigts levés, plus la multiplication du nombre des doigts baissés dans une main, par le nombre des doigts baissés dans l'autre.

plie successivement chaque chiffre du multiplicande par celui du multiplicateur, en observant, à chaque multiplication partielle, de retenir les dixaines, pour les porter sur la colonne suivante.

Exemple. Soit proposé de multiplier le nombre 3748 par 9. Ayant disposé le multiplicande et le multiplicateur comme on le voit ici, je commence par multiplier les unités du multiplicande par 9, en

Multiplicande.	3748
Multiplicateur	9
Produit	33732

disant 9 fois 8 font 72; je pose 2 et je retiens 7: je multiplie les dixaines du multiplicande par 9, en disant 9 fois 4 font 36, et 7 de retenus font 43; je pose 3 et je retiens 4: je multiplie les centaines du multiplicande, en disant 9 fois 7 font 63, et 4 de retenus font 67; je pose 7 et je retiens 6. Enfin les mille du multiplicande multipliés par 9, donnent 27 et 6 de retenus font 33 que j'écris: l'opération est achevée, et le produit total est 33732.

On peut remarquer que pour faire la multiplication relative au second cas, on multiplie séparément chaque chiffre du multiplicande par celui du multiplicateur. Donc quand on saura faire les multiplications d'un seul chiffre par un autre chiffre, on saura faire la multiplication de plusieurs chiffres par un seul.

35. *Troisième cas.* Si le multiplicande et le multiplicateur sont tous les deux des nombres composés, on écrit le multiplicateur sous le multiplicande, on tire une ligne horizontale, on multiplie ensuite tout le multiplicande par chaque chiffre du multiplicateur, ce qui donne autant de produits partiels que le multiplicateur contient de chiffres; on ajoute ensemble tous ces produits, et leur somme forme le produit total. En écrivant les produits partiels, on

observera de quelle nature est le premier chiffre de chaque produit, pour mettre dans une même colonne verticale tous les chiffres de même nature. C'est pour cette raison qu'on recule d'un rang vers la gauche le premier chiffre du produit des dixaines; de deux rangs le premier chiffre du produit des centaines, &c.

Exemple. Soit proposé de multiplier 3452 par 657. Les nombres étant disposés comme on le voit ici, on fera chaque produit partiel comme dans le second cas (34); on les écrira dans l'ordre qu'on voit ici, et on trouvera le produit par l'addition des trois produits partiels.

Multiplicande.	3452
Multiplicateur	657
	24164
	17260
	20712
Produit	2267964

On auroit pu commencer la multiplication par les centaines du multiplicateur, passer de-là aux dixaines, et finir par les unités; on auroit eu les mêmes produits partiels, mais écrits dans un ordre inverse, et tels qu'on les voit ici.

20712
17260
24164
2267964

36. Si le multiplicateur contenoit des zéros intermédiaires, on supprimeroit les produits partiels qui ne contiendroient que des zéros, et l'on observeroit de placer le produit du chiffre significatif après les zéros au rang qui lui convient.

Exemple. Soit proposé de multiplier 50756 par 20005, on écrira les produits partiels comme on le voit dans cet exemple:

	50756
	20005
	253780
	101512....
Produit...	1015373780

37. Lorsqu'il s'agit de multiplier un nombre par

10, il suffit d'ajouter un zéro au multiplicande. En effet, multiplier un nombre par 10, c'est le rendre dix fois plus grand; mais un zéro ajouté au multiplicande le rend dix fois plus grand; donc &c.

Pareillement pour multiplier un nombre par 100, par 1000, il faudra ajouter deux, trois zéros à côté du multiplicande. Ainsi, si l'on avoit 48 à multiplier par 10, par 100, par 1000, les trois produits seroient 480, 4800, 48000. Si l'on avoit à multiplier par 20, par 30, par 40, on commenceroit par multiplier le multiplicande par 2, par 3, par 4, et on ajouteroit ensuite un zéro.

C'est par une suite des mêmes principes, que si on a à multiplier deux facteurs qui soient terminés par des zéros, on se contente de multiplier ensemble les chiffres significatifs à leur gauche, et on met au produit autant de zéros qu'il y en avoit à la suite des deux facteurs.

Exemple. Multiplier 64000 par 3400.

Je multiplie 64 par 34 : le produit est 2176; j'y ajoute cinq zéros, ce qui donne 217600000 pour le véritable produit.

38. On voit par tout ce que nous venons de dire sur la multiplication, que le troisième cas dépend du second, comme le second dépend du premier, et que par conséquent, pour être en état de faire une multiplication quelconque, il suffit de savoir la table de Pythagore; car tout l'art de la multiplication, comme de l'addition et de la soustraction, consiste à chercher, par plusieurs opérations partielles, un résultat qu'on ne pourroit pas obtenir par une seule opération de l'esprit.

De la Division.

39. La division est une opération de l'arithmétique, par laquelle on cherche combien de fois une

quantité donnée est contenue dans une autre de même nature, ou par laquelle on partage une quantité donnée en un nombre connu de parties égales.

Il suit de cette définition, que la division doit être considérée sous deux rapports différens. Sous l'un et l'autre rapport, on y considère trois nombres : 1°. celui que l'on donne à diviser, et qu'on nomme *dividende*; 2°. celui par lequel le dividende doit être divisé, qu'on nomme *diviseur*; 3°. celui qui résulte de la division du dividende par le diviseur, et qu'on nomme *quotient*.

Dans la division, envisagée sous le premier rapport, le dividende et le diviseur expriment des quantités de même nature, et le quotient est un nombre abstrait, qui exprime combien de fois le dividende contient le diviseur. On peut donc dire, dans ce cas, qu'il y a le même rapport entre le dividende et le diviseur qu'entre le quotient et l'unité.

Par exemple, si je divise 24 liv. par 8 liv., le quotient est 3, et il y a le même rapport entre le dividende 24 liv. et le diviseur 8 liv. qu'entre le quotient abstrait 3 et l'unité abstraite. On peut donc, sans changer le quotient, multiplier ou diviser le dividende et le diviseur par le même nombre.

Dans la division considérée sous le second rapport, le dividende exprime des quantités de même nature que le quotient, et le diviseur doit marquer des unités abstraites. Dans ce cas, il y a le même rapport entre le dividende et le quotient qu'entre le diviseur et l'unité abstraite. Par exemple, s'il s'agit de partager 24 liv. en trois parties égales, le quotient est 8 liv.; et il y a le même rapport entre le dividende 24 liv. et le quotient 8 liv. qu'entre le diviseur abstrait 3 et l'unité abstraite (*a*).

(*a*) A ne considérer les nombres que comme l'expression

Sous quelque point de vue qu'on considère la division, le diviseur multiplié par le quotient, sera toujours égal au dividende, et marquera des quantités de même nature que le dividende, et la manière d'opérer sera toujours comme s'il n'étoit question que de savoir combien de fois le dividende contient le diviseur ; on donnera ensuite aux unités du quotient la dénomination qui leur conviendra, suivant l'état de la question.

40. Toute division pourroit s'exécuter par le moyen de la soustraction, comme la multiplication par le moyen de l'addition. Qu'il s'agisse de diviser 30 par 10, ou de trouver combien de fois 30 contient 10, il est évident que le dividende contient le diviseur autant de fois qu'on peut l'en retrancher: je fais donc la soustraction ; de 30 j'en retranche 10, il reste 20 ; de 20 je retranche 10, il reste 10 ; de 10 je retranche 10, il reste 0 ; donc 30 contient 10 trois fois. Mais on conçoit qu'une pareille opération seroit impraticable, si le dividende étoit considérable ; il a donc fallu suivre une autre méthode.

Nous distinguerons deux cas, le premier, lorsque le dividende est composé de plusieurs chiffres, et que le diviseur n'en contient qu'un ; le second, lorsque le dividende et le diviseur sont composés de plusieurs chiffres.

41. *Premier cas.* Faire la division lorsque le dividende est composé de plusieurs chiffres, et que le diviseur n'en contient qu'un.

Ayant d'abord écrit le dividende, on mettra le diviseur à côté, en le séparant par une accollade. On

---

des rapports, selon la définition de Newton, on peut dire que le dividende, le diviseur et le quotient sont toujours des nombres abstraits, et sous ce point de vue, la division ne présente qu'un seul cas à considérer.

tirera une ligne sous le diviseur, et on écrira sous cette ligne les chiffres du quotient à mesure qu'on les trouvera. Or pour trouver ces chiffres, il faut diviser successivement toutes les parties du dividende par le diviseur, en commençant par les unités de la plus haute espèce; c'est-à-dire, en allant de gauche à droite, jusqu'à ce que le dividende soit épuisé. Chaque division partielle fournit un chiffre au quotient, et le résultat de tous ces quotiens particuliers, écrits chacun à leur place, forme le quotient total de la division.

Exemple. On propose de diviser 6759 par 3.

J'arrange les termes ainsi qu'on le voit dans l'opération. Mettant ensuite un point sur le premier chiffre du dividende, afin de déterminer le premier membre de division, je dirai en 6 combien de fois 3? il y est 2 fois; j'écris 2 au quotient, et pour savoir si effectivement 6 contient 3 deux fois, je multiplie le quotient trouvé 2 par le diviseur 3; le produit est 6, que j'écris sous le 6 du dividende pour en faire la soustraction: il ne reste rien; ce qui fait voir que 3 est contenu deux fois exactement dans 6. Ensuite posant un point sur le chiffre 7 du dividende, je l'abaisse au-dessous de la ligne, où il forme le second membre de division. Je dis donc, en 7 combien de fois 3? il y est deux fois; j'écris encore 2 au quotient, et multipliant 2 par 3, j'ai pour produit 6 que j'écris sous le 7, pour en faire la soustraction: il restera 1, à côté duquel

```
           ....  { 3 diviseur.
Dividende  6759  { ----------
           6     { 2253 quot.
           --
           07
            6
           --
            15
            15
            --
             09
              9
             --
              0
```

j'abaisse le 5 du dividende en le marquant d'un point, pour indiquer le chiffre du dividende sur lequel on opère. Le troisième membre de division sera 15 : je dis donc, en 15 combien de fois 3 ? il y est 5 fois : j'écris 5 au quotient, et multipliant 5 par 3, j'aurai 15 que je soustrairai de 15 ; il restera 0, à côté duquel je descends 9, ayant toujours soin de mettre un point sur le chiffre abaissé, le dernier membre de la division sera 9 : je divise 9 par 3 ; le quotient est 3, que j'écris à côté du 5 : je multiplie 3 par 3 ; le produit est 9, que j'écris sous le 9 : soustraction faite, il ne reste rien ; donc le véritable quotient est 2253 : c'est-à-dire que 6759 contient 3, 2253 fois. Ce que l'on peut prouver, en multipliant le quotient par le diviseur, car le produit doit donner le dividende.

42. *Remarque première.* En commençant la division, nous avons dit, en 6 combien de fois 3? il y est deux fois, tandis qu'il auroit fallu dire naturellement, en 6 mille combien de fois 3 ? il y est deux mille fois ; mais il est aisé de concevoir que l'expression abrégée dont on se sert fait toujours trouver le véritable quotient, puisque le 2 se trouvera au rang des mille, lorsqu'on aura mis devant lui les quotiens provenant des autres membres de division : il en seroit de même des autres chiffres du quotient.

43. *Remarque 2ᵉ.* On remarquera sans doute que la division se fait en allant de gauche à droite, tandis que dans les autres règles on va de droite à gauche. La raison de cette pratique est que les opérations de l'arithmétique doivent être ordonnées de manière que la suite de ces opérations n'influe point sur les chiffres déjà écrits ; c'est ce qui a lieu de la manière dont on fait ces opérations. Si, au contraire,

on opéroit dans un ordre inverse, il faudroit retoucher sans cesse les chiffres déjà écrits. Par exemple, si l'on commençoit la soustraction par la gauche, on retrancheroit le chiffre le plus à gauche dans la somme inférieure, de son correspondant dans la somme supérieure; on écriroit au-dessous la différence, on passeroit à la colonne suivante : mais si le chiffre inférieur se trouvoit plus fort que son correspondant supérieur, ce qui arrive souvent, on seroit forcé de revenir sur ses pas, pour emprunter une unité sur le premier chiffre à gauche; et il faudroit diminuer d'une unité le chiffre écrit à la différence.

Le même inconvénient auroit lieu dans la division, si on la pratiquoit dans un ordre inverse de celui qui est adopté. En effet, si on avoit 537 à diviser par 3, et qu'on voulût commencer par les unités, on diroit en 7 combien de fois 3? il y est 2 fois, et 1 de reste. On se trouveroit embarrassé de cet 1, parce qu'on ne pourroit pas le convertir en unités de la colonne suivante; tandis qu'en commençant par la gauche, quand on a un reste dans un membre de division, il se convertit naturellement en unités de la colonne suivante, en y mettant à côté le chiffre de cette même colonne... Par exemple, en divisant 5 par 3, dans l'exemple déjà cité, le quotient est 1, avec un reste 2 qui vaut 20, par rapport au 3 suivant, ce que l'on obtient en mettant 3 à côté du 2, ce qui donne 23 pour second membre de division. La marche qu'on suit dans les quatre règles est donc la plus simple possible pour obtenir les résultats qu'on cherche.

44. *Second cas.* Faire la division lorsque le dividende et le diviseur contiennent plusieurs chiffres.

Tout l'art de la division, en pareil cas, consiste à partager le dividende total en plusieurs dividendes partiels, assez grands pour contenir le diviseur; ils

seront par conséquent composés d'un égal nombre de chiffres que le diviseur, ou ils en contiendront un de plus. Chaque membre de division donnera un chiffre au quotient, en suivant les règles prescrites pour le premier cas.

EXEMPLE. *Diviser* 32035 *par* 469.

32035	469
2814	$68+\frac{143}{469}$
3895	
3752	
143	

On disposera les termes comme dans le premier exemple: les trois premiers chiffres du dividende ne contenant pas le diviseur, on en prendra quatre, et l'on aura 3203 pour former le premier membre de division. On cherchera combien de fois 3203 contient 469; mais comme il n'est pas facile de saisir tout d'un coup le rapport des nombres, dès qu'ils sont un peu grands, au lieu de dire en 3203 combien de fois 469, je comparerai seulement les centaines du dividende avec celles du diviseur, en négligeant pour un moment les dixaines et les unités. Je dirai donc, en 32 centaines combien de fois 4 centaines? il y est justement 8 fois; mais on ne peut pas écrire 8 au quotient, parce que 469 multiplié par 8 donneroit un produit plus grand que le dividende 3203. Le diviseur 469 n'est donc pas contenu 8 fois dans le premier membre de division; il n'y est pas même contenu 7 fois, parce que 469, multiplié par 7, donneroit encore un produit plus grand que 3203. La raison pour laquelle on trouve des quotiens trop grands, provient de ce que dans la comparaison du dividende au diviseur on néglige les dixaines et les unités, dont pourtant il faut tenir compte dans la multiplication du quotient par le diviseur; mais si cette opération donne quelquefois trop au quotient, au moins il est sûr qu'elle ne donnera jamais trop peu, et c'est pour

cela qu'on se contente de diviser le premier chiffre du dividende par le premier du diviseur.

On mettra donc le 6 au quotient, et ce 6 marquera six dixaines, par le rang qu'il occupera. Le quotient multiplié par le diviseur, donne 2814 qu'on écrit sous le dividende : soustraction faite, il reste 389 dixaines, à côté desquelles on descendra les 5 unités du dividende ; et l'on aura 3895 unités à diviser par 469. Comme il y a un chiffre de plus au dividende qu'au diviseur, je comparerai 38 centaines à 4 centaines ; le quotient est 9 : mais par la multiplication on trouveroit que le 9 est trop fort ; on le diminue d'une unité, et l'on écrit 8 à côté du 6. En multipliant 8 par 469, le produit est 3752, que l'on écrit sous le second membre de division : après la soustraction, il reste 143 qui ne peuvent pas se diviser par 469 ; on se contente d'indiquer la division en écrivant à côté du quotient $\frac{143}{469}$.

45. *Remarque première.* On voit par cet exemple que le quotient ne se trouve souvent que par une espèce de tâtonnement, qui embarrasse pour l'ordinaire les commençans ; mais ce tâtonnement est soumis à des règles qui servent à l'abréger. Par exemple, quand on a trouvé un quotient, par les règles déjà prescrites ; avant de l'écrire, il faut le soumettre à l'épreuve, en multipliant le quotient par le diviseur. Cette multiplication peut se faire d'une manière abrégée, en multipliant seulement le premier chiffre à gauche du diviseur par le quotient : on soustrait le produit du dividende partiel auquel il correspond. Si on trouve un reste plus grand ou égal au chiffre que l'on éprouve, on peut le mettre au quotient, sans aucun examen ultérieur. Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, le premier membre de division nous a donné d'abord 8 ; mais $8 \times 4 = 32$, qui étant égal aux deux premiers chiffres du dividende, nous

avertit que la multiplication de 8 par 69 donneroit un nombre trop fort pour pouvoir être soustrait de 03. Il en seroit de même de 7 ; mais $6 \times 4 = 24$, qui soustrait de 32, laisse $8 > 6$: donc on est sûr que 6 peut être écrit au quotient.

Pour sentir la raison de ce procédé, supposons un cas des plus favorables ; ce sera celui où le dividende sera le plus petit possible, par rapport au diviseur. Par exemple, 3000 à diviser par 499, donne 6 au quotient ; et ce quotient sera exact, parce que $6 \times 4 = 24$, qui soustrait de 30, laisse 6 centaines ou 600 : or 6×100 sera toujours plus grand que 6×99 : donc on pourra soustraire le produit des dixaines et des unités du diviseur par le quotient, du reste du dividende. Mais si cette soustraction est possible quand le dividende est terminé par des zéros, et le diviseur par des 9, à plus forte raison le sera-t-elle quand le dividende sera terminé par de plus grands chiffres, et le diviseur par de plus petits.

46. *Remarque 2e*. L'opération sur le premier membre étant achevée, si, après avoir descendu un chiffre, on s'apperçoit que le diviseur entier n'est pas contenu dans ce nouveau membre du dividende, on mettra 0 au quotient, et on descendra un chiffre de plus ; et s'il arrivoit que le diviseur ne fût pas contenu dans le nouveau dividende, on mettroit un second 0 au quotient ; et ainsi de suite, jusqu'à ce que le diviseur fût compris dans le membre sur lequel on opère.

47. *Remarque 3e*. En comparant seulement les premiers chiffres de chaque membre de division avec les chiffres de même espèce du diviseur, on seroit tenté quelquefois de croire que le membre de division contient plus de neuf fois tout le diviseur. L'objet de cette remarque est de faire voir le contraire :

nous allons démontrer, en conséquence, qu'on ne peut jamais mettre plus de 9 au quotient. Nous avons deux cas à considérer; ou le membre de division contient un même nombre de chiffres que le dividende, ou il en contient un de plus : or, dans aucun de ces deux cas, on ne peut mettre plus de 9 au quotient.

Premier cas. Le quotient, pour être exact, doit toujours être tel, qu'étant multiplié par le diviseur, il égale le dividende. Mais, si le quotient étoit 10, son produit par le diviseur contiendroit nécessairement un chiffre de plus que le dividende : donc il seroit plus grand que lui. Par exemple, 99 divisé par 10, ne peut donner que 9 au quotient; car, si on mettoit 10, le diviseur 10, multiplié par le quotient 10, donneroit $100 > 99$.

Deuxième cas. Pour que le dividende contienne un chiffre de plus que le diviseur, il faut qu'il y ait dans le dividende un chiffre plus petit que son correspondant dans le diviseur, tous ceux qui le précèdent à gauche dans le dividende étant égaux à leurs correspondans dans le diviseur. Par exemple, 1989 divisé par 199 : dans cette division, il faut nécessairement prendre les quatre chiffres du dividende; parce que 8 (dixaines du dividende) est plus petit que 9 (dixaines du diviseur). Or, je dis que dans ce cas on ne peut pas écrire plus de 9 au quotient; car, si le quotient étoit 10, en le multipliant par le diviseur, le produit contiendroit un égal nombre de chiffres que le dividende. Mais, dans le cas dont nous parlons, il y auroit un chiffre dans le produit nécessairement plus grand que son correspondant dans le dividende, tandis que ceux qui précèdent à gauche seroient égaux; donc le produit seroit plus grand que le dividende, donc il ne pourroit pas en être soustrait.

trait. Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, $\frac{1989}{} \big\} \frac{199}{9}$,
on diroit en 19 centaines combien de fois 1 centaine? il y seroit 19 fois; je n'écrirai cependant que 9, car 10×199 donneroit $1990 > 1989$: donc il ne pourroit pas en être retranché.

48. Quand le dividende et le diviseur sont terminés par des zéros, on peut abréger la division, en effaçant un égal nombre de zéros dans les deux nombres; cela n'influe pas sur le quotient, parce que cela ne change pas le rapport du dividende au diviseur. Ainsi, ayant à diviser 25000 par 500, je divise seulement 250 par 5; le quotient est 50.

Si le diviseur seul est terminé par des zéros, on abrège la division, en séparant à la fin du dividende autant de chiffres qu'il y a de zéros à la fin du diviseur. On divise ensuite les chiffres restans du dividende par les chiffres restans du diviseur; s'il se trouve un reste dans la division, on écrit les chiffres à gauche de ceux qu'on a séparés, en mettant pardessous le diviseur tout entier. Par exemple, ayant à diviser 45326 par 3500, je divise 453 par 35; le quotient est 12, avec un reste 33, que j'écris à gauche de 26; divisant le tout par 3500, c'est-à-dire que le véritable quotient est $12 + \frac{3326}{3500}$ (*a*).

49. Il y aura toujours autant de chiffres au quotient qu'il y aura de membres de division : or, 1°. le premier membre de division contiendra autant de chiffres, ou un de plus, qu'il y en a dans le diviseur;

(*a*) La raison de cette abréviation est évidente: car 45326 est la même chose que $45300 + 26$. Or le premier terme divisé par 3500 donne le même quotient que 453 divisé par 35; c'est-à-dire $12 + \frac{33}{35}$. Mais $\frac{33}{35}$ sont encore la même chose que $\frac{3300}{3500}$, lesquels ajoutés aux 26 restant, donnent $\frac{3326}{3500}$.

2°. on formera les autres membres de division en abaissant successivement chaque chiffre du dividende à côté des différens restes : donc il sera aisé de connoître, dès le premier membre de division, le nombre de chiffres que le quotient doit avoir.

Les détails dans lesquels nous sommes entrés sont suffisans pour faire comprendre toutes les règles de la division. Nous allons les appliquer encore à un exemple, dans lequel nous ne donnerons que les résultats.

Exemple. Soit proposé de diviser 3999348 par 684 : on écrira et on procédera comme dans les exemples précédens :

```
  3999348 { 684
  3420    { 5847
   5793
   5472
    3214
    2736
     4788
     4788
     0000
```

A l'égard des différentes manières de faire la division, nous n'entrerons pas ici dans ce détail, parce qu'à proprement parler, elles reviennent toutes au même ; elles ne diffèrent qu'en ce que dans l'une le quotient, le diviseur et les produits sont placés d'une manière, et dans une autre, d'une façon différente. On se dispense quelquefois d'écrire les produits ; et on fait la soustraction en formant les produits de mémoire. Cette manière de faire la division sans écrire les produits, s'appelle *l'italienne abrégée*. Il est cependant bon que les commençans, qui n'ont pas un

usage très-familier du calcul, écrivent les produits, afin de ne pas se tromper.

Preuve de la multiplication et de la division.

50. La preuve de la multiplication se fait par la division, et celle de la division se fait par la multiplication; elles sont l'une et l'autre une conséquence de cet axiome, qu'un nombre multiplié et divisé par un même nombre ne change pas de valeur.

Donc si, après avoir multiplié le multiplicande par le multiplicateur, on divise le produit par le même multiplicateur, le quotient doit être égal au multiplicande; ou réciproquement, si on divise le produit par le multiplicande, le quotient doit être égal au multiplicateur : si cette égalité n'a pas lieu, la multiplication est fautive.

Pareillement si, après avoir divisé le dividende par le diviseur, on multiplie le quotient par ce même diviseur, on doit trouver le dividende : si le produit qu'on obtient étoit plus grand ou plus petit que le dividende, la division seroit défectueuse.

Remarque. On suppose ici que la division s'est effectuée sans reste : s'il y avoit un reste, il faudroit l'ajouter au produit du diviseur par le quotient, pour avoir le dividende.

Preuve de la multiplication et de la division, par la propriété du nombre 9.

51. On peut encore faire la preuve de la multiplication et de la division par d'autres méthodes particulières, qui dépendent de certaines propriétés des nombres. Par exemple, tout le monde connoît la propriété du nombre 9, qui consiste en ce que, si un nombre est divisible par 9, la somme de tous ses

chiffres est aussi divisible par 9. Cela se remarque facilement dans les nombres multiples de 9, tels que 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81. On peut aussi par ce moyen voir tout de suite, non-seulement si un nombre est divisible par 9, mais encore quel est son reste : car on n'a qu'à faire la somme des chiffres, et la diviser par 9, le reste de cette division sera le même que celui du nombre proposé.

On trouveroit également les restes d'un nombre divisé par 8, par 7, ou par tout autre nombre; mais nous ne pourrions démontrer ici toutes les propriétés des nombres, sans nous engager dans une analyse trop compliquée. Nous en parlerons dans le dernier chapitre de l'algèbre, lorsque nous traiterons d'une manière générale, des principes de numération d'un système quelconque. Revenons à la preuve par 9.

On commencera par tirer deux lignes qui se coupent perpendiculairement. 1°. On prendra ensuite la somme de tous les chiffres du multiplicande, comme s'ils marquoient des unités; on en retranchera les 9 qu'elle contient, on écrira le reste dans une des cases formées par les lignes perpendiculaires. 2°. On en fera autant dans le multiplicateur, on écrira le reste dans la case inférieure. 3°. On multipliera les deux restes, et, après avoir ôté tous les 9 du produit, on écrira le reste dans la troisième case. 4°. On ajoutera les chiffres du produit, et, après avoir ôté tous les 9, on écrira le reste dans la quatrième case. Si la multiplication est exacte, ce dernier reste doit être égal au reste écrit dans la troisième case.

Exemple :

			1er reste	3e reste
Multiplicande	5748		6	3
Multiplicateur	869	Preuve..	2e reste	4e reste
Produit...	4995012		5	3

Cette preuve peut être défectueuse, en ce qu'elle

seroit la même si on transposoit un chiffre, ou si, à la place d'un 9 on écrivoit zéro, ou réciproquement. Ainsi, le reste de 4905921, après avoir ôté tous les 9 de la somme des chiffres, seroit 3 comme ci-dessus, et cependant le produit seroit faux; mais il est bien rare, pour ne pas dire impossible, de commettre de pareilles erreurs.

La preuve par 9 peut aussi convenir à la division, lorsque le dividende contient le diviseur un certain nombre de fois sans reste; car, pour lors, le dividende peut être considéré comme un produit, le diviseur et le quotient comme les deux facteurs de la multiplication, et ce que nous venons de dire de la multiplication s'y applique sans restriction.

Si la division n'a pu se faire sans reste, il faut ajouter les chiffres de ce reste, comme des unités simples, au produit du reste du diviseur par celui du quotient, et ôter de cette somme tous les 9 qu'elle contient. Le reste doit être égal au reste du dividende, après en avoir ôté tous les 9 (*a*).

Exemple. 785 | 47 ; quotient $16+\frac{33}{47}$

Preuve..

1er reste	3e reste
2	2
2e reste	4e reste
7	2

(*a*) Pour sentir la raison de ce procédé, on n'a qu'à considérer que 785—33, où 752 est le nombre qui, divisé par 47, donne 16 au quotient sans reste; donc si nous appliquons la preuve par 9 à cette nouvelle division, elle doit réussir. Partant, si après avoir ajouté les chiffres de 752, et multiplié les restes de 47 et 16, on trouve le même reste de part et d'autre, on peut conclure qu'en ajoutant les deux chiffres de 33 aux deux membres de l'équation, ils y opéreront les mêmes changemens, et par conséquent ils ne détruiront pas l'égalité, car le premier membre sera le reste de 785; donc, il doit être égal au reste de 2 par 7, augmenté de la somme des deux chiffres de 33.

Des nombres fractionnaires.

52. L'arithmétique, à proprement parler, a deux parties ; l'une est fondée sur le système décimal, et sur la manière de placer les chiffres, pour leur faire exprimer les différens nombres : cette partie est celle qui contient les quatre opérations ordinaires, l'addition, la soustraction, la multiplication et la division. Ces opérations seroient différentes si on avoit adopté un autre système ; mais elles auroient entre elles une analogie telle, qu'il ne seroit pas difficile de traduire les unes dans les autres, si on vouloit changer de système.

L'autre partie est indépendante du système de numération ; elle est fondée sur la considération des quantités et sur les propriétés générales des nombres. On peut la regarder comme l'arithmétique universelle, qui tient de près à l'algèbre. La théorie des fractions, celle des puissances et des racines, la théorie des proportions, celle des progressions et des logarithmes, etc. appartiennent à cette partie. Nous avons déjà exposé les principes de la première, nous allons nous occuper de la seconde.

Des Fractions.

53. Si l'on conçoit l'unité partagée en plusieurs parties égales, et qu'on ne considère, par la pensée, qu'un certain nombre de ces parties, on aura l'idée d'une fraction.

Une fraction représente donc toujours une quantité plus petite que l'unité.

La grandeur ou quantité, pouvant être partagée en autant de parties qu'on veut, si l'on conçoit l'unité partagée en deux parties égales, chaque partie en

sera la moitié ; si on la suppose partagée en trois parties égales, chaque partie en sera le tiers ; si on la divise en quatre, chaque partie sera un quart ; et ainsi des autres divisions.

Il est aisé de concevoir, que plus le nombre des divisions sera grand, plus les parties seront petites ; ainsi les tiers sont plus petits que les moitiés, les quarts plus petits que les tiers, les cinquièmes plus petits que les quarts, etc.

54. Pour exprimer une fraction, on a besoin de deux nombres, que l'on écrit l'un au-dessous de l'autre, en les séparant par une petite ligne horizontale. Le nombre inférieur désigne en combien de parties l'unité a été divisée ; on le nomme *dénominateur :* le supérieur indique combien on prend de ces parties ; on le nomme *numérateur.* Ainsi, dans l'expression $\frac{3}{4}$, le 4 désigne que l'unité est partagée en quatre parties, et le 3 marque que l'on en prend trois.

55. Plus le numérateur d'une fraction est grand, et son dénominateur petit, plus la fraction est grande ; et réciproquement, plus le numérateur de la fraction est petit, et son dénominateur grand, plus la fraction est petite : en sorte que la notion exacte de la valeur d'une fraction est composée de l'idée du numérateur et de celle du dénominateur.

56. Lorsque plusieurs fractions ont le même dénominateur, il suffit de considérer leurs numérateurs pour connoître leur rapport ; et réciproquement, lorsqu'elles ont le même numérateur, il suffit de comparer leurs dénominateurs.

Lorsque le dénominateur augmente progressivement, la valeur de la fraction diminue dans le même rapport. Ainsi, les fractions $\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{4}\ldots\frac{1}{10}.\frac{1}{100}\ldots$ etc.

vont toujours en diminuant, parce que leurs dénominateurs vont en augmentant (*a*).

57. On peut encore concevoir une fraction, comme le quotient du numérateur divisé par le dénominateur. Ainsi, $\frac{2}{3}$ signifie deux divisé par trois, $\frac{3}{4}$ est la même chose que trois divisé par quatre.

Les fractions, ainsi considérées, représentent le rapport du numérateur au dénominateur; et la valeur de la fraction, est la valeur même du rapport.

58. Donc une fraction ne change pas de valeur, lorsqu'on multiplie ou qu'on divise ses deux termes par un même nombre : ainsi $\frac{3}{6}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{7}{14}$, etc. ont la même valeur que $\frac{1}{2}$.

Une même fraction est susceptible de plusieurs formes différentes; et l'on peut passer d'une forme à l'autre, sans altérer la valeur de la fraction.

On peut aussi mettre un entier sous la forme d'une fraction, en multipliant cet entier par un nombre, et donnant au produit le même nombre pour dénominateur. Lors donc que le numérateur d'une fraction est plus grand que le dénominateur, cela annonce que la fraction contient des entiers.

59. Lorsqu'on a plusieurs fractions à considérer, il convient de les réduire à l'expression la plus sim-

---

(*a*) Pour que la fraction se réduisît à zéro, il faudroit que son dénominateur fût plus grand que toute quantité assignable. Or il n'existe pas de nombre si grand, qu'on ne puisse en concevoir un plus grand que lui : donc quelque grand qu'on veuille supposer le dénominateur d'une fraction, elle ne s'évanouira jamais entièrement, mais sa valeur approchera de plus en plus de zéro, qui sera par conséquent sa limite.

Pour exprimer qu'une quantité est plus grande que toute grandeur assignable, on dit qu'elle est infinie, et pour la représenter, on emploie le signe ∞, en sorte que $\frac{1}{\infty} = 0$ est l'expression de la limite des fractions qui diminuent continuellement.

ple : ce qui se pratique en divisant le numérateur et le dénominateur par leur plus grand commun diviseur. Nous allons donner la méthode pour trouver, 1°. tous les diviseurs d'un nombre, 2°. le plus grand commun diviseur entre deux nombres donnés.

60. Tout nombre qui divise exactement et sans reste un autre nombre, est dit diviseur de ce nombre.

Tout nombre peut se diviser sans reste, par lui-même et par l'unité. On appelle nombre premier, tout nombre qui n'a d'autre diviseur que lui-même et l'unité, tels que 7, 11, 13, &c. Jusqu'à présent on n'a aucun moyen pour trouver *à priori* les nombres premiers; ce n'est qu'en essayant la division par tous les nombres inférieurs, qu'on est venu à bout de former des tables des nombres premiers, qu'on a poussées jusqu'à un million.

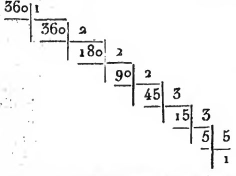
61. Si un nombre n'est pas premier, il a communément plusieurs diviseurs, qu'on trouvera facilement par la méthode suivante :

Cherchez tous les diviseurs premiers du nombre proposé, en observant que le même diviseur peut être répété plusieurs fois : multipliez entr'eux tous les diviseurs premiers, d'abord deux à deux, ensuite trois à trois, quatre à quatre, &c. jusqu'à ce que vous ayez formé le produit de tous, qui sera le nombre proposé : tous ces différens produits seront autant de diviseurs.

Exemple. Soit proposé le nombre 360, dont on cherche tous les diviseurs. Je commence par diviser 360 par 2; le quotient est 180, que je divise aussi par 2; le quotient est 90, que je divise encore par 2; le quotient est 45, que je divise par 3; le quotient est 15, que je divise par 3; le quotient est 5, que je divise par 5; le quotient est 1 : donc tous les diviseurs premiers de 360 sont 1.2.2.2.3.3.5. Pour avoir

les diviseurs composés, on posera 1, qu'on multipliera par 2, et l'on aura pour diviseurs 1.2 : on multipliera ces deux diviseurs par le second 2, en observant de ne pas répéter les diviseurs déjà obtenus, et l'on aura un nouveau diviseur 4, lequel, joint aux deux autres, donnera les trois diviseurs 1.2.4 : on les multipliera par le troisième 2, et on obtiendra un nouveau diviseur 8, qui, ajouté aux trois précédens, donnera 1.2.4.8 : on multipliera ces quatre diviseurs par le premier 3, et on aura 3, 6, 12, 24, qui, ajoutés aux quatre déjà obtenus, donneront 1.2.4.8.3.6.12.24 : ces huit diviseurs, multipliés par le second 3, fourniront quatre nouveaux diviseurs, 9, 18, 36, 72 : en les ajoutant avec les autres, on aura 1.2.4.8.3.6.12.24.9.18.36.72 : enfin tous ces diviseurs, multipliés par 5, donneront autant de diviseurs; savoir : 5, 10, 20, 40, 15, 30, 60, 120, 45, 90, 180, 360. Ces derniers, ajoutés aux précédens, formeront le nombre de tous les diviseurs de 360; savoir :......................
1.2.4.8.3.6.12.24.9.18.36.72.5.10.20.40.
15.30.60.120.45.90.180.360.

Le tableau suivant peut servir de comparaison pour trouver les diviseurs premiers.



Où l'on voit que les diviseurs premiers de 360

sont 1, 2, 3, 5; on aura les diviseurs composés par les multiplications indiquées.

La raison de cette opération est évidente. En effet, un nombre ne peut pas être divisible par plusieurs nombres simples, sans l'être par les différens produits qu'on peut faire avec ces nombres simples. Par exemple, diviser un nombre premièrement par 2, son quotient par 3, et le quotient de celui-ci par 4, c'est tout comme si on avoit divisé par une seule opération le nombre proposé par 24.

62. Pour trouver le plus grand commun diviseur entre deux nombres donnés, on pourroit chercher, par la méthode précédente, tous les diviseurs des deux nombres, et prendre ensuite parmi les diviseurs communs celui qui se trouveroit le plus grand.

Mais on ira plus directement au but par la règle suivante. Divisez le plus grand nombre par le plus petit, divisez ensuite le plus petit nombre par le reste de la première division, le premier reste par le reste de la seconde division, ce second reste par le troisième, et ainsi de suite, jusqu'à ce que vous parveniez à une division sans reste, le dernier diviseur sera le plus grand commun diviseur cherché.

Exemple. Soient les deux nombres 105 et 75. Je divise 105 par 75, le quotient est 1, et le reste 30; je divise 75 par 30, le quotient est 2, et 15 pour reste; je divise 30 par 15, le quotient est 2 sans reste: d'où je conclus que 15 est le plus grand commun diviseur entre 105 et 75.

Le tableau suivant servira de comparaison.

105	75	30	15
75	1	2	2
30	60	30	
	15	0	

Si l'on parvenoit à avoir 1 pour dernier reste, ce seroit une preuve que les deux nombres sont premiers entr'eux; c'est-à-dire qu'ils n'ont d'autre commun diviseur que l'unité.

Pour sentir la raison de cette méthode, il suffit de considérer que le diviseur doit être commun à 75 et à 105. Or 105 est la même chose que $75+30$, donc ce diviseur ne peut pas diviser 105 et 75 sans diviser aussi 30; mais 75 est la même chose que $2\times30+15$, donc il ne peut pas diviser 105, 75 et 30, sans diviser aussi 15; mais 15 ne peut pas être divisé par un nombre plus grand que lui-même. Le même raisonnement s'appliqueroit à tous les exemples: on en verra une démonstration générale en algèbre (*a*).

On peut donc réduire la fraction $\frac{75}{105}$ à celle-ci plus simple $\frac{5}{7}$, sans changer sa valeur (58).

Quand on a acquis l'habitude du calcul, on apperçoit sans peine quel est le plus grand commun diviseur de deux nombres, sans le chercher par la méthode générale.

63. Il est souvent nécessaire de réduire plusieurs fractions au même dénominateur; c'est ce que l'on fera par la règle suivante: *Multipliez les deux termes de chaque fraction par le produit des dénominateurs de toutes les autres.*

Exemple. Soient les quatre fractions $\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{2}{7}, \frac{1}{4}$, qu'il faut réduire au même dénominateur. Je multiplie les deux termes de la première par 140 (pro-

---

(*a*) Pour trouver le plus grand commun diviseur entre trois nombres, par exemple entre 105, 75 et 40, on commenceroit par chercher le plus grand commun diviseur entre les deux premiers, et après avoir trouvé 15, on chercheroit, par la même méthode, le plus grand commun diviseur entre 40 et 15, on trouveroit 5; donc 5 seroit le plus grand commun diviseur entre 105, 75 et 40.

duit des trois dénominateurs 5, 7, 4), j'aurai $\frac{280}{420}$.... Je multiplie les deux termes de la seconde par 84 (produit des trois dénominateurs 3, 7, 4), j'aurai $\frac{168}{420}$... Je multiplie les deux termes de la troisième par 60 (produit des trois dénominateurs 3, 5, 4), j'aurai $\frac{120}{420}$... Je multiplie les deux termes de la quatrième par 105 (produit des trois dénominateurs 3, 5, 7), j'aurai $\frac{105}{420}$.

Il est évident qu'en suivant cette règle, quel que soit le nombre des fractions, elles seront, 1°. réduites au même dénominateur, car le dénominateur commun sera le produit de tous les dénominateurs simples; 2°. on n'aura pas changé la valeur des fractions, car on aura multiplié les deux termes de chaque fraction par le même nombre (58).

64. Si les dénominateurs des fractions qu'on veut réduire étoient tous parties aliquotes du plus grand, on abrégeroit l'opération en multipliant les deux termes de chaque fraction par le facteur qui rendroit chaque dénominateur égal au plus grand : ainsi les fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{7}{16}$, se réduiront toutes en seizièmes, en multipliant les deux termes de la première par 8, ceux de la seconde par 4, ceux de la troisième par 2. Ces cas particuliers se présentent assez souvent; il est bon de les remarquer, parce qu'ils apprennent à simplifier le calcul.

Après avoir expliqué la nature des fractions, et les différentes formes qn'on peut leur donner sans changer leur valeur, nous allons nous occuper de leur calcul. On fait sur les fractions les mêmes opérations que sur les nombres entiers, c'est-à-dire qu'on les ajoute, on les retranche, on les multiplie, on les divise, &c.

De l'addition des Fractions.

65. Pour ajouter ensemble plusieurs fractions,

il faut commencer par les réduire au même dénominateur ; on ajoute ensuite leurs numérateurs, l'on donne à cette somme le dénominateur commun, et on fait la réduction s'il y a lieu.

En effet, 1°. on ne peut jamais ajouter ensemble que des quantités de même nature. Or le dénominateur des fractions désigne la nature des fractions ; donc les fractions qu'on veut ajouter doivent avoir le même dénominateur. 2°. Le numérateur marque combien on prend de ces parties dans chaque fraction ; donc pour avoir la somme totale des parties, il faudra prendre la somme de tous les numérateurs.

Exemple. On propose d'ajouter ensemble les fractions $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$....

Réduites au même dénominateur, elles donneront $\frac{12}{24}+\frac{16}{24}+\frac{18}{24}$. La somme des numérateurs est 46 ; donc l'addition totale donnera $\frac{46}{24}$, $=$ en réduisant $1+\frac{22}{24}$ $=1+\frac{11}{12}$ (58).

De la soustraction des Fractions.

66. Pour faire la soustraction des fractions, réduisez-les au même dénominateur, et retranchez ensuite le numérateur de l'une du numérateur de l'autre.

Exemple. On propose de retrancher $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{3}$.

Après les avoir réduites au même dénominateur, on aura $\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$ pour la première soustraction, et $\frac{4}{12}-\frac{3}{12}=\frac{1}{12}$ pour la seconde.

La raison de cette opération est la même que pour l'addition.

De la multiplication des Fractions.

67. La multiplication des fractions comprend deux cas : le premier, lorsque le multiplicande est

une fraction, et le multiplicateur, un nombre entier; le second, lorsque le multiplicande et le multiplicateur sont des fractions.

Dans le premier cas, *multipliez le numérateur par l'entier, et laissez le dénominateur tel qu'il est.*

Exemple. Qu'on ait à multiplier la fraction $\frac{5}{7}$ par 4, le produit sera $\frac{20}{7}$. En effet, il s'agit dans cet exemple de prendre $\frac{5}{7}$ quatre fois, le produit doit donc être $\frac{20}{7}$.

Dans le second cas, *multipliez les deux numérateurs l'un par l'autre, et les deux dénominateurs l'un par l'autre,* vous formerez une nouvelle fraction, qui aura pour numérateur le premier produit, et pour dénominateur, le second.

Exemple. Soit $\frac{3}{5}$ à multiplier par $\frac{4}{7}$, le produit sera $\frac{12}{35}$. En effet, en multipliant la fraction $\frac{3}{5}$ par le numérateur 4, on a un produit sept fois trop grand, parce qu'il ne falloit multiplier que par la septième partie de 4, ou, ce qui est la même chose, par $\frac{4}{7}$. Pour réduire donc à sa juste valeur le produit qu'on a obtenu en multipliant par 4, il faut le diviser par 7. Mais pour diviser une fraction par un nombre donné, il suffit de multiplier son dénominateur par ce nombre (56); donc après avoir multiplié le numérateur 3 par 4, il faudra encore multiplier le dénominateur 5 par 7. Le même raisonnement s'applique à tous les autres cas.

68. Si l'on veut ramener le premier cas au second, pour les comprendre dans une même règle générale, on peut considérer l'entier comme une fraction ayant pour dénominateur l'unité. Ainsi 4 est la même chose que $\frac{4}{1}$, et dans l'exemple premier, on aura $\frac{5}{7}$ à multiplier par $\frac{4}{1}$. On multipliera 5 par 4, et 7 par 1, ce qui donnera $\frac{20}{7}$ comme ci-dessus. On peut donc établir la règle générale qui se rapporte

aux deux cas. Lorsqu'un des deux facteurs est un nombre entier, *mettez-le sous la forme d'une fraction, en lui donnant l'unité pour dénominateur; multipliez ensuite numérateur par numérateur, et dénominateur par dénominateur.*

69. La multiplication des fractions nous donne idée de ce que l'on entend par fraction de fraction. La fraction d'une fraction signifie que la fraction est partagée en plusieurs parties égales, et qu'on prend un certain nombre de ces parties, en sorte que la somme des parties que l'on a prises, est plus petite que la fraction totale; mais la multiplication d'une fraction par une autre fraction, présente aussi un produit plus petit que la fraction multiplicande: donc l'idée est absolument la même. Ainsi les $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ signifie que $\frac{3}{4}$ est partagé en 3 parties, et que de ces parties on en prend 2, ou que $\frac{3}{4}$ est pris $\frac{2}{3}$ de fois, c'est-à-dire qu'il est multiplié par $\frac{2}{3}$.

Ainsi, pour trouver les $\frac{2}{3}$ des $\frac{3}{4}$ des $\frac{4}{5}$ d'un écu, il faudroit multiplier entr'elles ces trois fractions, et l'on auroit pour produit $\frac{2}{5}$ d'un écu = 24 s.

De la division des Fractions.

70. La division des fractions comprend trois cas; dans le premier, il s'agit de diviser une fraction par un entier; dans le second, il faut diviser un entier par une fraction; dans le troisième, le dividende et le diviseur sont tous les deux des nombres fractionnaires.

Pour bien comprendre ce que nous avons à dire sur la division, il faut se rappeler ce que nous avons dit sur la nature des fractions; savoir, que l'on rend la fraction plus petite en rendant son dénominateur plus grand.

Premier cas. Pour diviser une fraction par un entier,

entier, *multipliez le dénominateur par l'entier, et laissez le numérateur tel qu'il est.*

Exemple. Soit la fraction $\frac{2}{3}$ qu'on veut diviser par 5, le quotient sera $\frac{2}{15}$. En effet, pour diviser la fraction $\frac{2}{3}$ par 5, il faut rendre la fraction cinq fois plus petite; or on la rend cinq fois plus petite en multipliant son dénominateur par 5 : donc, &c.

Second cas. Pour diviser un entier par une fraction, multipliez pareillement le dénominateur par l'entier, et renversez la fraction, c'est-à-dire, mettez le dénominateur à la place du numérateur, et réciproquement. Ainsi l'entier 5 divisé par la fraction $\frac{2}{3}$, donne pour quotient $\frac{15}{2}$; car le quotient doit être d'autant plus grand, que le diviseur est plus petit : or $\frac{2}{3}$ est trois fois plus petit que 2; donc le quotient de 5, divisé par $\frac{2}{3}$, sera trois fois plus grand que celui de 5 divisé par 2; mais ce dernier seroit $\frac{5}{2}$, donc le premier doit être $\frac{5\times3}{2}=\frac{15}{2}$.

Troisième cas. Pour diviser une fraction par une autre fraction, *multipliez le numérateur du dividende par le dénominateur du diviseur, et le dénominateur du dividende par le numérateur du diviseur;* ou, ce qui revient au même, renversez la fraction diviseur, et multipliez par ordre la première par la seconde ainsi renversée : ainsi, pour diviser la fraction $\frac{2}{3}$ par la fraction $\frac{4}{5}$, je renverse cette dernière, et j'écris $\frac{2}{3}\times\frac{5}{4}=\frac{10}{12}$.

La raison de cette opération est que $\frac{2}{3}$ divisé par 4 donne pour quotient $\frac{2}{12}$; or, la fraction $\frac{4}{5}$ est cinq fois plus petite que 4, donc elle doit donner un quotient cinq fois plus grand, donc on aura $\frac{2}{12}\times5=\frac{10}{12}$.

71. Pour comprendre les trois cas dans une même règle générale, nous remarquerons que l'on peut mettre l'entier sous la forme d'une fraction, en lui donnant 1 pour dénominateur; on aura donc ainsi,

dans tous les cas, une fraction à diviser par une fraction : on peut donc établir la règle générale suivante, applicable aux trois cas : *Mettez l'entier sous la forme d'une fraction qui ait l'unité pour dénominateur ; renversez la fraction diviseur, et multipliez ainsi les deux fractions, le produit sera la fraction quotient* (*a*).

Exemples.

1°. $\frac{3}{5}$ à diviser par 7 ; j'écris $\frac{3}{5}$ à div. $\frac{7}{1}$... quot. $= \frac{3\times1}{5\times7} = \frac{3}{35}$

2°. 7 à diviser par $\frac{3}{5}$; j'écris $\frac{7}{1}$ à div. $\frac{3}{5}$... quot. $= \frac{7\times5}{3\times1} = \frac{35}{3}$

3°. $\frac{3}{4}$ à diviser par $\frac{2}{7}$.............. quot. $= \frac{3\times7}{4\times2} = \frac{21}{8}$.

Des fractions continues.

72. Nous avons déjà dit (56) qu'on ne changeoit pas la valeur d'une fraction, en divisant ou en multipliant ses deux termes par le même nombre : donc si on divise le numérateur de la fraction par lui-même, il deviendra l'unité, et le dénominateur divisé par le même nombre, deviendra un

(*a*) La multiplication et la division des fractions présentent dans leurs résultats des idées qui quelquefois embarrassent les commençans : savoir que dans la première le produit est plus petit que le multiplicande, et dans la seconde, le quotient est plus grand que le dividende ; mais cette difficulté disparoît, quand on considère que dans toute multiplication le produit est au multiplicande, comme le multiplicateur est à l'unité. Or lorsque le multiplicateur est une fraction, il est plus petit que l'unité ; donc le produit doit être plus petit que le multiplicande. On se convaincra par un raisonnement semblable, que le quotient doit être plus grand que le dividende, lorsque le diviseur est plus petit que l'unité.

entier augmenté d'une fraction. Si l'on traite cette seconde fraction comme la première, on aura de nouveau l'unité divisée par un entier, plus une fraction, et ainsi de suite.

Exemple. Soit la fraction $\frac{68}{47} = 1 + \frac{21}{47}$. Si je divise le numérateur et le dénominateur par 21, j'aurai $\frac{1}{2+\frac{5}{21}}$; si je divise le numérateur et le dénominateur de la fraction $\frac{5}{21}$ par 5, elle prendra la forme de $\frac{1}{4+\frac{1}{5}}$. Donc la première fraction prendra la forme suivante : $\frac{1}{2+\frac{1}{4+\frac{1}{5}}}$.

Cette suite de fractions ainsi enchaînées se nomme fractions continues.

Il est aisé de réduire une fraction ordinaire en fraction continue, et réciproquement une fraction continue en fraction ordinaire, par les règles déjà expliquées.

73. Toutes les fois que la fraction continue sera l'expression du rapport de deux nombres entiers, elle se terminera ; si elle est l'expression du rapport de deux nombres qui n'ont pas de mesure commune assignable, elle se prolonge à l'infini.

74. Quoique la théorie des fractions continues ne se trouve guère dans les livres élémentaires, elle mérite cependant d'être cultivée, parce qu'elle conduit à plusieurs vérités curieuses, et qu'elle donne la solution d'un grand nombre de questions importantes. L'un de ses principaux avantages, est de donner les valeurs des fractions exprimées par de très-grands nombres, les plus approchées que l'on puisse obtenir avec de petits nombres. Il suffit pour

cela de réduire la fraction proposée en fraction continue, d'arrêter cette fraction à l'un de ses termes, et de mettre la fraction continue ainsi tronquée, sous la forme d'une fraction ordinaire.

Exemple. Soit la fraction $\frac{100000000}{111764706}$ qu'il s'agit de réduire à une forme plus simple. Si on veut se contenter d'une valeur approchée, on la réduira en fraction continue, et on aura la suivante :

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2941176}}}},$$

dans laquelle on peut, sans erreur sensible, négliger la dernière fraction intégrante : négligeant donc $\frac{1}{2941176}$, on trouvera que la fraction continue $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{2}}}$ se réduit à $\frac{17}{19}$; ce qui est une valeur très-approchée de la fraction proposée et la plus approchée qu'on puisse obtenir, avec un numérateur et un dénominateur composés de deux chiffres.

75. Si l'on rapproche le procédé qu'on suit pour réduire une fraction ordinaire en fraction continue de celui que nous avons expliqué pour trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres, on verra que l'on suit la même méthode. Mais dans la recherche du plus grand commun diviseur, on ne fait attention qu'aux différens restes dont le dernier est le diviseur qu'on cherche; au lieu qu'en employant les quotiens successifs, on obtient des fractions qui approchent de plus en plus de la fraction donnée.

Des opérations sur les nombres complexes.

76. Après avoir partagé l'unité en un certain nombre de parties, on peut considérer chaque partie comme une nouvelle unité plus petite que la première, et la subdiviser en plusieurs parties.

Chaque subdivision peut être à son tour considérée comme une nouvelle unité susceptible d'autant de divisions qu'on voudra. On donne à ces unités différens noms, pour les distinguer les unes des autres, et on les a introduites dans l'arithmétique pour faciliter les opérations des fractions, en les ramenant, autant que cela est possible, aux règles des nombres entiers.

C'est ainsi que la livre (monnoie) a été d'abord divisée en vingtièmes qu'on a appelés *sous;* chaque sou a été subdivisé en douzièmes qu'on a nommés *deniers.*

La toise a été divisée en sixièmes qu'on a nommés *pieds ;* le pied a été subdivisé en douzièmes qu'on a appelés *pouces.*

La livre (poids) a été divisée en deux *marcs*, le marc en huit *onces*, l'once en huit *gros*, le gros en huit *grains :* mais toutes ces divisions vont devenir inutiles, lorsque le nouveau système de poids et mesures, déjà exécuté, sera généralement adopté. Cependant, comme on peut encore avoir besoin des nombres complexes, ne fût-ce que pour calculer en poids et mesures des nations étrangères, nous allons dire en peu de mots comment on peut opérer sur ces sortes de nombres.

De l'addition des Quantités complexes.

77. L'addition des quantités complexes se fait comme celle des nombres incomplexes. On écrit

tous les nombres proposés les uns sous les autres, de manière que ceux de même espèce soient dans une même colonne verticale : on commence par ajouter les nombres de la plus petite espèce ; on retient autant d'unités que cette première somme en contient de la nature des unités suivantes, pour les porter sur la colonne qui va suivre. La réunion de toutes ces additions partielles forme la somme totale.

Exemple. On propose d'ajouter ensemble les quatre sommes suivantes :

44 liv.	15 s.	3 d.
26	5	6
9	10	9
12	4	3
92	15	9

Je commence par prendre la somme des deniers, qui est 21 : dans 21 deniers il y a 1 s. et 9 d. J'écris les 9 d. sous la colonne des deniers, et je retiens 1 s. que je porte à la colonne des unités de *sou;* ce qui donne pour cette colonne 15 s. ; je pose 5 s., et je retiens une dixaine de sous que je porte sur la colonne suivante, ce qui fait en tout 3 dixaines de sous. Je prends la moitié de 3, qui est 1, avec une dixaine de reste ; je pose cette dixaine, et je retiens une livre que je porte à la colonne des unités de livres, après quoi je continue l'opération à l'ordinaire.

On voit par cet exemple qu'une seule addition complexe est composée de plusieurs opérations différentes, et qu'il est nécessaire de connoître combien il faut d'unités de chaque espèce, pour en faire une de l'espèce immédiatement plus grande.

De la soustraction des Nombres complexes.

78. La soustraction des nombres complexes se fait comme celle des nombres incomplexes ; on écrit les quantités de même espèce dans une même co-

lonne, et l'on soustrait le nombre inférieur de son correspondant supérieur : lorsque le chiffre inférieur est plus grand que son correspondant, il faut emprunter une unité sur la colonne précédente. Cet emprunt exige deux attentions, l'une pour réduire l'unité qu'on vient d'emprunter en parties de la même espèce que celle de la colonne sur laquelle on opère, l'autre pour ajouter le nombre de ces parties avec celui qui se trouve déjà dans cette même colonne.

Exemple. Soit proposé de			
soustraire de	3257 liv.	5 s.	3 d.
la somme de	1789	15	6
reste	1467	9	9

Je remarque d'abord que de 3 d. je ne puis pas retrancher 6 d. ; j'emprunte donc sur les 5 s. un sou que je réduis en 12 d. ; ajoutant ces 12 d. à 3 d., j'ai 15 d., dont je retranche 6 d. : le reste est 9 d. que j'écris sous la même colonne. Je passe à la colonne des sous, et comme de 4 s. je ne puis pas retrancher 15 s., j'emprunte une livre sur la colonne suivante, je la réduis en 20 s. que je joints aux 4 ; retranchant 15 s. de 24 s., il reste 9 s. que j'écris sous les unités des sous : on fait ensuite la soustraction des livres à l'ordinaire.

L'addition et la soustraction, comme on voit, ne sont pas sujettes à de grandes difficultés ; elles se servent mutuellement de preuves, d'après ce que nous avons dit (30) sur les nombres incomplexes.

De la multiplication des Nombres complexes.

79. Pour que la multiplication soit possible, il faut que le multiplicateur soit un nombre abstrait (31) ; or, la méthode la plus simple de rendre le mul-

tiplicateur un nombre abstrait, consiste à le réduire à ses plus petites espèces, en lui donnant pour dénominateur le nombre qui marque combien de fois la plus petite espèce est contenue dans la plus grande. Pour rendre le calcul plus simple, et la manière de procéder plus régulière, on réduit pareillement le multiplicande à ses plus petites espèces, en lui donnant pour dénominateur le nombre qui marque combien de fois la plus petite espèce est contenue dans la plus grande.

Exemple. Combien coûteroient 33 toises 4 pieds 6 pouces de maçonnerie, à raison de 37 liv. 17 s. 6 d. la toise (*a*)?

Je réduis d'abord les 33 toises en pieds; en les multipliant par 6, j'aurai 198 pieds, qui, ajoutés avec les 4, donnent 202 pieds : je les réduis en pouces en les multipliant par 12; j'ai 2424, qui ajoutés aux 6, donnent 2430 pouces : je donne à ce nombre le dénominateur 72, qui marque combien de pouces il y a dans la toise, le multiplicateur sera donc réduit à la fraction $\frac{2430}{72}$.

Je réduis le multiplicande en deniers, en multipliant d'abord 37 par 20, ce qui donne 740 s., qui ajoutés avec les 17 s. font 757 s. : multipliant par 12, et ajoutant les 6 d., on a 9090 d. auxquels on donne pour dénominateur 240, qui marque combien il y a de deniers dans la livre; le multiplicande sera donc réduit à la fraction $\frac{9060}{240}$. Je multiplie entr'elles les deux fractions (67) $\frac{2430}{72}$ et $\frac{9090}{240}$. Le produit est $\frac{22088700}{17280}$. Je divise le numérateur par le dénominateur; le quotient est 1278 liv. $+ \frac{486}{1728}$. Je réduis cette fraction de livre en sous; en la multipliant par

(*a*) Nous entendons ici par toise de maçonnerie, la toise en longueur, et non la toise cube qui résulteroit du produit des trois dimensions, longueur, largeur et profondeur.

20, j'ai $\frac{9720}{1728}$ s. : le quotient est 5 s. + $\frac{1080}{1728}$. Je réduis cette fraction de sous en deniers ; en la multipliant par 12, j'ai $\frac{12960}{1728}$ d. = 7 d. + $\frac{864}{1728}$. Cette dernière fraction se réduit à $\frac{1}{2}$; donc le prix que je cherchois est 1278 l. 5 s. 7 d. $\frac{1}{2}$ d.

De la division des Nombres complexes.

80. La division étant une opération inverse de la multiplication, on pourra l'effectuer par une méthode analogue à celle que nous avons suivie pour la multiplication ; mais pour procéder avec ordre, nous distinguerons deux cas : le premier, lorsque le dividende étant complexe, le diviseur est simple ; le second, lorsque le dividende et le diviseur sont tous les deux complexes.

Premier cas. On divisera successivement toutes les parties du dividende par le diviseur, et on aura un quotient composé d'unités de différentes espèces.

Exemple. On propose de diviser 1613 liv. 9 s. 6 d. par 213 ; je commence par diviser 1613 liv. par 213 ; le quotient est 7 liv. avec un reste 122 liv., que je réduis en sous : ce qui fait 2440 s., qui, ajoutés aux 9 s. du dividende, donnent 2449 à diviser par 213 ; le quotient est 11, avec un reste 106, qui, réduit en deniers, fait 1272 d. Ajoutant ce nombre avec les 6 d. du dividende, on a 1278 d., qui, divisés par 213, donnent pour quotient 6, sans reste. Donc le quotient total est 7 liv. 11 s. 6 d. ; c'est-à-dire que 7 liv. 11 s. 6 d. est la deux cent treizième partie de 1613 liv. 9 s. 6 d. La raison de cette opération est fondée sur ce que nous avons dit dans la division des nombres entiers.

Second cas. Si le dividende et le diviseur sont complexes, on commencera par les réduire l'un et l'autre aux plus petites espèces ; en leur donnant à

chacun pour dénominateur, le nombre qui marque combien de fois la plus petite espèce est contenue dans la plus grande; on aura ainsi une fraction à diviser par une autre fraction. On opérera donc comme il est dit (70 et 71).

Exemple. 33 toises 4 pieds 6 pouces de maçonnerie ont coûté 1278 liv. 5 s. 7 d. $\frac{1}{2}$, combien coûtera chaque toise?

Il est visible qu'il faut diviser 1278 liv. 5 s. 7 d. $\frac{1}{2}$ par 33 t. 4 p. 6 pou.; je réduis le diviseur en pouces, et j'ai la fraction $\frac{2430}{72}$. Je réduis pareillement le dividende en deniers, et même en demi-deniers, si l'on ne veut pas négliger la petite fraction $\frac{1}{2}$ d.: j'aurai la fraction $\frac{613575}{480}$ à diviser par $\frac{2430}{72}$. Avant de faire la division, il convient de simplifier les deux fractions; en divisant le numérateur et le dénominateur de la première par 15, elle se réduit à $\frac{40905}{32}$; en divisant pareillement les deux termes de la seconde par 18, elle se réduit à $\frac{135}{4}$. En opérant, comme il est dit (70), et réduisant, on trouvera pour la fraction quotient $\frac{8181}{216}$. Or, le nombre fractionnaire contient 37 entiers, plus $\frac{189}{216}$: cette fraction, réduite en sous, et le reste en deniers, donnera pour quotient 17 s. 6 d. Donc le quotient demandé sera 37 liv. 17 s. 6 d., comme cela doit être (79).

Cet exemple sert de preuve à celui de la multiplication.

Des Fractions décimales.

81. La théorie des fractions, considérée de la manière la plus générale, est indépendante du système de numération adopté pour le calcul des nombres entiers, parce que leurs dénominateurs étant différens, la qualité et la nature de leurs parties varie sans être assujettie à aucune loi. Nous

ne concevons et ne comparons facilement que les nombres fractionnaires, dont le dénominateur est le même, parce que nous regardons le dénominateur comme un tout, dont nous voyons les différentes parties. C'est donc faire un grand pas vers la perfection de l'arithmétiqne, que de n'introduire dans le calcul que des fractions qui aient le même dénominateur, ou qui puissent y être ramenées facilement. On a choisi de préférence, celles qui ont pour dénominateur 10, 100, 1000, etc. parce que cette division décimale étant conforme à l'échelle arithmétique, elle facilite et simplifie de beaucoup le calcul des fractions, en les assujettissant à la même loi que les nombres entiers.

82. *On appelle donc fractions décimales, celles dont l'unité est continuellement sous-décuple de l'unité principale.* Telles sont les fractions $\frac{7}{10}$, $\frac{83}{100}$, $\frac{124}{1000}$, etc.

Si l'on conçoit donc l'unité divisée en dix parties, chaque partie sera $\frac{1}{10}$ de l'unité. Si l'on subdivise $\frac{1}{10}$ en dix parties, chaque partie sera $\frac{1}{10}$ de $\frac{1}{10}$ ou $\frac{1}{100}$ de l'unité principale : si on subdivise encore $\frac{1}{100}$ en dix parties, chaque partie sera $\frac{1}{10}$ de $\frac{1}{100}$, ou $\frac{1}{1000}$ de l'unité principale, et ainsi des autres divisions.

83. De même que dans le système de notre arithmétique ordinaire, en ajoutant ensemble dix dixaines, on forme une centaine; semblablement si on ajoute dix dixièmes, on forme une unité; si on ajoute dix centièmes, on forme un dixième; si on ajoute dix millièmes, on forme un centième, &c.

Les fractions décimales étant assujetties à la même loi que les nombres entiers, on peut les écrire les unes à côté des autres, en supprimant leur dénominateur, puisque la valeur de la fraction sera toujours déterminée par le rang qu'occupera son numé-

rateur. Ainsi pour écrire $\frac{3}{10}+\frac{5}{100}$, on écrira 0,35. Le zéro marque qu'il n'y a pas d'entiers, et la virgule est employée pour désigner où finissent les entiers et commencent les fractions. Suivant cet ordre, le premier chiffre après la virgule marque des dixièmes, le second marque des centièmes, le troisième exprime des millièmes, &c. Il en est donc des fractions décimales comme des unités simples; l'unité de chaque chiffre est dix fois plus petite que l'unité du chiffre qui le précède vers la gauche.

84. D'après ce que nous venons de dire, il est facile d'énoncer un nombre qui contient des parties décimales. Soit, par exemple, 345,732 : les chiffres écrits à la gauche de la virgule représentent trois cent quarante-cinq unités; le chiffre 7 qui vient immédiatement après la virgule, exprime sept dixièmes; le chiffre 3 exprime trois centièmes; le chiffre 2 exprime deux millièmes. Par conséquent le nombre proposé peut s'énoncer ainsi : trois cent quarante-cinq unités, sept dixièmes, trois centièmes et deux millièmes. Mais si l'on considère que $\frac{7}{10}$ est la même chose que $\frac{700}{1000}$, que $\frac{3}{100}$ est la même chose que $\frac{30}{1000}$, on pourra énoncer la partie décimale d'une manière encore plus simple, en disant *sept cent trente-deux millièmes*. Par où l'on voit que quoique ces fractions aient chacune un dénominateur différent, il est aisé de les réduire au même dénominateur, à l'inspection seule des chiffres qui doivent composer le numérateur; il suffit de nommer les chiffres décimaux comme s'ils marquoient des nombres entiers, et de leur donner pour dénominateur commun le dénominateur qui conviendroit au dernier chiffre.

85. Puisque la virgule fait la séparation des parties décimales d'avec les unités principales, il est

clair qu'en avançant cette virgule d'un rang vers la droite ou vers la gauche, on rendra le nombre dix fois plus grand, ou dix fois plus petit. Soit, par exemple, le nombre 354,27, en avançant la virgule d'un rang de plus, on écrit 3542,7; on voit que les centaines du premier nombre deviennent des mille; les dixaines deviennent des centaines; les unités, des dixaines; les dixièmes, des unités; les centièmes, des dixièmes : donc par le déplacement de la virgule, chaque partie du nombre proposé est devenue dix fois plus grande; le nombre lui-même est donc devenu dix fois plus grand. Au contraire, en reculant la virgule vers la gauche, le nombre deviendroit dix fois plus petit.

On voit par un raisonnement semblable, qu'en avançant la virgule vers la droite, de deux, de trois, de quatre rangs, on rendroit les nombres 100 fois, 1000 fois, 10000 fois plus grands; et qu'au contraire, en les reculant vers la gauche, de deux, de trois, de quatre rangs, on rendroit le nombre 100 fois, 1000 fois, 10000 fois plus petit.

86. On ne change point la valeur d'un nombre qui contient des décimales, en écrivant à la droite de ce nombre autant de zéros qu'on voudra : ainsi, par exemple, 35,24 est la même chose que 35,2400; car le premier nombre signifie trente-cinq unités deux dixièmes quatre centièmes, et le second marque trente-cinq unités deux dixièmes quatre centièmes, zéro de millièmes, zéro de dix millièmes : donc la valeur est la même. Réciproquement, si, à la droite des figures décimales, il se trouve des zéros, on pourra supprimer ces zéros, sans changer la valeur.

87. Puisque les fractions décimales sont assujetties au principe fondamental de l'arithmétique, il s'ensuit que toutes les règles qui dérivent de ce prin-

cipe, s'y appliqueront comme sur les nombres entiers. La seule attention à avoir consiste dans la manière de placer à propos la virgule qui indique l'unité principale; mais cela est si facile, que souvent, en faisant une opération avec l'attention convenable, on pourroit deviner de soi-même à quel endroit elle doit être placée, sans qu'il soit besoin d'une règle pour le dire.

De l'Addition.

88. Pour faire l'addition des quantités décimales, écrivez les sommes à ajouter les unes sous les autres, en mettant toutes les virgules dans une même colonne; ajoutez les chiffres comme s'ils représentoient des entiers, et, dans le total, placez la virgule au même rang où elle est déjà dans les nombres supérieurs.

Exemples.

38,57	342,53	87,432
45,23	427,20	85,305
73,38	58,05	75,063
64,52	403,18	42,270
221,70	1230,96	290,070

La raison de cette opération est évidente, puisque dix unités de chaque colonne valent 1, par rapport à la colonne suivante.

De la Soustraction.

89. Pour faire la soustraction des décimales, écrivez les deux nombres proposés, l'un au-dessous de l'autre, de manière que les virgules se répondent; et dans le nombre qui exprime le reste, mettez la virgule au même rang où elle est déjà, dans les deux nombres supérieurs.

Exemples.

38,536	76,324	63,005
27,324	47,546	46,358
11,212	28,778	16,647

De la multiplication des Décimales.

90. Pour faire la multiplication des décimales par des entiers, ou par d'autres décimales, écrivez les deux nombres proposés l'un au-dessous de l'autre, comme il a été dit dans la multiplication des entiers; multipliez à l'ordinaire, sans faire attention à la virgule, et ensuite, dans le produit, séparez autant de chiffres à droite, au moyen de la virgule, qu'il y a de décimales au multiplicande et au multiplicateur.

Exemples.

23,85	47,23	54,26
49	32,5	35,07
21465	23615	37982
9540	9446	27130
1168,65	14169	16278
	1534,975	1902,8982

Dans le premier exemple, nous avons multiplié des entiers et des décimales par des entiers, et nous avons séparé dans le produit autant de chiffres qu'il y a de décimales au multiplicande. La raison de cette opération est évidente : car en faisant la multiplication sans considérer la virgule, on suppose le multiplicande cent fois trop grand. Le produit est donc cent fois trop grand : on le ramène à sa vraie valeur, en séparant les deux derniers chiffres du produit.

Dans le second exemple, le multiplicande et le multiplicateur contiennent des décimales : en supprimant la virgule des deux facteurs, on rend le

premier cent fois trop grand, et le second, dix fois seulement. Le produit est donc mille fois trop grand : on le ramènera à sa juste valeur, en séparant trois chiffres par la virgule.

C'est par la même raison qu'il faut en séparer quatre dans le troisième exemple.

91. Dans la multiplication des décimales, on peut à volonté faire changer de place à la virgule du multiplicande et du multiplicateur, pourvu qu'en l'avançant de droite à gauche dans un des deux facteurs, on l'avance d'autant de gauche à droite dans l'autre facteur : on peut donc faire ensorte qu'un des deux nombres soit sans décimales, ce qui rend la question plus simple.

On peut aussi placer la virgule dans le courant de l'opération même, lorsqu'on multipliera les unités par les unités, parce que le produit qui en résulte ne peut être que d'unités.

Toutes ces différentes remarques sont des conséquences déduites du principe fondamental de la numération ; savoir, que dans les décimales comme dans les nombres entiers, un chiffre transposé d'un rang vers la gauche, acquiert une valeur décuple.

92. Il peut arriver que les deux facteurs de la multiplication soient si petits, que le produit ne contienne pas assez de chiffres pour en séparer, par la virgule, un nombre égal à celui des décimales du multiplicande et du multiplicateur. Il faut alors ajouter autant de zéros à la gauche, qu'il manque de chiffres, comme on le verra dans les exemples suivans :

15,04	2,03	2,001
0,003	0,004	0,003
0,04512	0,00812	0,006003

93.

93. Il ne faut pas confondre dans les décimales, un zéro placé à droite avec un zéro placé à gauche; le premier ne change pas la valeur de la fraction, tandis que le second la rend dix fois plus petite.

Ce seroit le contraire dans les nombres entiers. Un zéro placé à gauche ne changeroit pas sa valeur, tandis qu'un zéro placé à droite le rendroit dix fois plus grand.

94. Lorsque le multiplicande et le multiplicateur sont composés d'entiers et de décimales, la règle générale de la multiplication a souvent l'inconvénient de donner une approximation plus grande qu'il ne faut; car si les deux facteurs, par exemple, contenoient des centièmes, le produit contiendroit des dix millièmes; or je suppose qu'on ne veuille conserver dans le produit que les décimales du même ordre que dans le multiplicande; voici comment il faut s'y prendre pour n'avoir que les décimales nécessaires.

On écrira le multiplicateur au-dessous du multiplicande, de manière que le chiffre des unités du multiplicateur soit au-dessous du dernier chiffre du multiplicande. Ensuite on commencera par le dernier chiffre à gauche du multiplicateur, qu'on multipliera comme à l'ordinaire (*a*) par tous ceux du

(*a*) Dans la manière ordinaire de faire la multiplication, on commence par les unités du multiplicateur qu'on multiplie par celles du multiplicande; mais rien n'oblige à commencer par la droite du multiplicateur : on peut également commencer par la gauche (35). Cette méthode a même l'avantage de donner tout de suite les chiffres de la plus grande valeur, et ce sont ceux qui dans les multiplications des grands nombres intéressent le plus : souvent même on ne fait la multiplication que pour connoître ces derniers chiffres; c'est en cela que consiste un des avantages du calcul

multiplicande, en commençant par le dernier à droite, et en allant successivement vers la gauche; on continuera de même par le second chiffre du multiplicateur; mais en écrivant le produit, on ne tiendra compte que des dixaines que la multiplication du premier chiffre du multiplicande pourra donner; on les ajoutera au produit de son second chiffre, et on écrira la somme sous le premier chiffre du produit déjà écrit; on se servira du troisième chiffre du multiplicateur pour multiplier ceux du multiplicande à ne commencer qu'au second, encore faudra-t-il ne retenir que les dixaines de ce produit pour les ajouter aux unités du suivant; on écrira la somme sous les deux produits déjà écrits : à mesure qu'on avancera vers la droite du multiplicateur, on commencera la multiplication par un chiffre plus avancé vers la gauche du multiplicande, et négligeant les unités de ce produit, on n'en retiendra que les dixaines, qui seront toujours de la nature du premier chiffre écrit au produit.

Exemple. On demande le produit de 34,56 par 3,78 aux millièmes près.

On commence la multiplication par le 3 du multiplicateur, et il est visible que trois unités par 6 centièmes donneront 18 centièmes, donc le 8 marquera des centièmes. En passant au second chiffre du multiplicateur, on observera que 7 dixièmes par 6 centièmes donnent 42 millièmes; on néglige les 2 millièmes, et l'on ne retient que les 4 centièmes, pour les ajouter au

```
   . . .
   34,56
    3,78
  ------
   10368
    2419
     103
  ------
  128,90
```

des logarithmes, lesquels donnent toujours dans les multiplications, comme dans les divisions, ainsi que dans les élévations aux puissances et dans l'extraction des racines, les chiffres suivant l'ordre de leur rang, à commencer par le plus élevé, c'est-à-dire en allant de gauche à droite.

produit de 7 par 5. Par la même raison, 8 centièmes par 5 dixièmes donnent encore des millièmes; on néglige les unités, et l'on retient les dixaines pour les ajouter au produit de 8 par 4; on écrit les produits comme on le voit, et la première colonne marque des centièmes; la seconde des dixièmes, &c. donc, &c.

Pour pouvoir distinguer à quelles décimales du multiplicande et du multiplicateur on en est chaque fois, on les marque d'un point à mesure qu'on s'en sert.

De la division des décimales.

95. Pour faire la division des décimales, faites la division à l'ordinaire, sans avoir égard à la virgule; ensuite séparez dans le quotient autant de chiffres de droite à gauche qu'il y en a de plus dans les décimales du dividende, que dans celles du diviseur. Cette règle est générale et aisée à concevoir: cependant elle peut causer quelqu'embarras, lorsque le diviseur a plus de décimales que le dividende. Dans ce cas, on ajoute au dividende autant de zéros qu'il en faut pour qu'il ait autant de décimales que le diviseur, ce qui permet d'ôter la virgule du dividende et du diviseur, et parce qu'on peut en faire autant dans le diviseur lorsqu'il a un plus petit nombre de décimales que le dividende: nous pouvons établir la règle suivante:

Faites en sorte que le nombre des décimales soit le même dans le dividende et le diviseur, supprimez ensuite la virgule, et opérez comme sur les nombres entiers. En effet, en supprimant la virgule de part et d'autre, nous rendons le dividende et le diviseur plus grands, en conservant leur premier rapport; donc le quotient sera le même que si nous avions laissé subsister la virgule.

Exemple. On propose de diviser 131,7935 par 15,23.

J'ajoute deux zéros aux décimales du diviseur, et supprimant la virgule de part et d'autre, je divise 1317935 par 152300 : le quotient est 8 avec un reste 99535, qui doit être divisé par 152300 ; mais le dénominateur étant plus grand que le numérateur, j'ajoute un zéro au numérateur, ce qui le rend naturellement dix fois plus grand qu'il n'est, mais aussi j'écris son quotient au rang des dixièmes, en mettant une virgule après le 8. Ce quotient est 6. Je le multiplie par le diviseur ; soustraction faite, il reste 81550. J'ajoute un second zéro à côté de ce reste, et je continue la division par le même diviseur ; j'ai 5 pour quotient, avec un reste que je néglige.

On pourroit aussi, comme dans la multiplication, placer la virgule dans le courant de l'opération, lorsqu'on divisera des unités par des unités, des dixaines par des dixaines, ou des centaines par des centaines.

Exemple. On propose de diviser 19,936 par 3,2.

Je les écris comme les entiers ..... 19,936 | 3,2 | 6,23

Je fais en sorte qu'il n'y ait point de décimale au diviseur, ou, ce qui est la même chose, j'avance la virgule d'un rang de part et d'autre, et je dis ensuite, en 199 unités combien de fois 32 unités ? Le quotient est 6 unités, puisque le 6 marque les unités du quotient : les chiffres qui viendront après marqueront les décimales, donc la virgule doit être placée à côté du 6.

96. Toutes les fois que la division laisse un reste, comme dans le premier exemple, la théorie des décimales nous donne le moyen d'approcher d'aussi

près qu'on voudra du véritable quotient. Nous allons appliquer la méthode à un exemple.

Soit proposé de diviser 27 par 4, le quotient est 6, avec un reste 3, qui doit être divisé par 4 : si je mets un zéro à côté du 3, j'aurai 30, que je diviserai par 4 ; le quotient est 7, avec un reste 2 : mais le 7 est 10 fois trop grand, puisqu'il provient de la division de 30 par 4, au lieu que je devois diviser 3 par 4 : pour le rappeler à sa juste valeur, je le mettrai au rang des dixièmes. Par la même raison, le reste 2 est 10 fois trop grand ; si je le multiplie encore par 10, il sera 100 fois trop grand ; mais le quotient qui en proviendra sera au rang des centièmes ; donc l'erreur sera corrigée.

Il faudra donc suivre la règle suivante. Après avoir fait la division suivant les règles ordinaires, et avoir trouvé un reste, mettez un zéro à côté du reste, et continuez la division par le même diviseur ; écrivez le quotient au rang des dixièmes, ou, ce qui revient au même, placez la virgule à côté des unités du quotient, et mettez le chiffre dont nous venons de parler après la virgule ; s'il y a un reste, mettez un second zéro à côté du second reste, et continuez la division ; s'il y a encore un reste, mettez un troisième zéro, et ainsi de suite, comme on le voit dans l'exemple suivant :

Presque toutes ces divisions se continuent à l'infini, en sorte qu'en pareil cas on ne peut avoir un quotient exact ; mais on peut pousser l'approximation aussi loin qu'on veut, ce qui est un avantage de cette méthode.

	391	21
	181	18,61904
1er reste.	130	
	126	
2e reste.	40	
	21	
3e reste.	190	
	189	
4e reste.	100	

97. On peut aussi abréger l'opération par une méthode inverse de la multiplication (94). Cette méthode est très-commode. Lorsque le dividende et le diviseur sont composés d'un grand nombre de chiffres, et qu'on ne veut pousser l'approximation dans le quotient, que jusqu'à un ordre déterminé de décimales.

Exemple. Diviser 368,45 par 12,13.

Je fais la division à l'ordinaire, et après avoir trouvé au quotient 30 entiers et 455 pour reste, je ne mets pas de zéro à côté de ce reste, mais je continue la division comme s'il y étoit, en disant, en 4 combien de fois 1 ? 3 fois : j'écris 3 au quotient. Je multiplie 3 par 3, le produit est 9 : je ne l'écris pas au-dessous du diviseur ; mais le prenant pour une dixaine, parce qu'il n'en diffère pas de beaucoup, je l'ajoute avec le produit de 3 par le chiffre suivant du diviseur. Par cette méthode, j'aurai 364 à soustraire de 455 : le reste sera 91. Sans ajouter de zéro, je divise 9 par 1 : le quotient est 7, que je multiplie par le second chiffre du diviseur, encore faudra-t-il ne retenir que les dixaines de ce produit ; mais comme $7 \times 1 = 7$ est plus grand que 5, je le prends pour une dixaine. Le produit à soustraire sera donc 85 : le reste est 6. Je n'ajoute pas de zéro, mais je divise 6 par 1 : le quotient ne peut être que 5, parce que la multiplication de 5 par le troisième et le quatrième chiffre du diviseur, en ne retenant que les dixaines du 5 par 2, donne 6 ; donc le quotient est 30,375, comme on l'auroit trouvé si l'on eût fait la division selon la règle générale.

98. On peut encore, par les mêmes principes, réduire une fraction ordinaire en fraction décimale. La règle à suivre est de diviser le numérateur par le dénominateur, en ajoutant au premier autant de zéros qu'on veut avoir de décimales au quotient.

Ainsi, pour réduire $\frac{3}{4}$ en décimales, on divise 300 par 4 ; on a 75 au quotient, que l'on écrit 0,75. On met les 75 au rang des décimales, parce qu'on avoit ajouté deux zéros au dividende.

Au lieu d'ajonter au numérateur un certain nombre de zéros à-la-fois, on peut ne les ajouter que successivement : dès qu'on parvient à n'avoir plus de reste, l'opération est finie ; mais tant qu'il y a un reste, on peut continuer à ajouter des zéros, et pousser l'approximation aussi loin qu'on voudra.

Pour réduire la fraction $\frac{1}{3}$ en décimales, on ajoutera un zéro au numérateur, on divisera 10 par 3, le quotient est 3, et 1 de reste; on ajoutera un zéro : et l'on aura encore 10 à diviser par 3; le quotient sera 3 et 1 de reste : on ajoutera un troisième zéro, et l'on continuera à l'infini; donc $\frac{1}{3} = 0,3333\ldots$ à l'infini.

On réduiroit de même en décimales toutes les autres fractions, et l'on peut s'exercer à vérifier la table suivante :

Réductions de quelques fractions ordinaires en fractions décimales exactes ou approchées.

$\frac{1}{2}$ ...	0,5	$\frac{1}{3}$ ...	0,333333	$\frac{1}{5}$ ..	0,2
$\frac{1}{4}$ ...	0,25	$\frac{1}{6}$ ...	0,166667	$\frac{1}{7}$ ..	0,142857
$\frac{1}{8}$ ...	0,125	$\frac{1}{12}$ ..	0,083333	$\frac{1}{9}$ ..	0,111111
$\frac{1}{16}$ ..	0,0625	$\frac{1}{24}$ ..	0,041667	$\frac{1}{11}$.	0,090909
$\frac{1}{32}$ ..	0,03125	$\frac{1}{48}$ ..	0,020833	$\frac{1}{13}$.	0,076923
$\frac{1}{64}$ ..	0,015625	$\frac{1}{96}$ ..	0,010417	$\frac{1}{15}$.	0,066667
$\frac{1}{128}$.	0,007812	$\frac{1}{192}$..	0,005208	$\frac{1}{17}$.	0,058824
$\frac{1}{256}$.	0,003906	$\frac{1}{384}$..	0,002604	$\frac{1}{19}$.	0,052632
$\frac{1}{512}$.	0,001953	$\frac{1}{768}$..	0,001302	$\frac{1}{21}$.	0,047619
$\frac{1}{1024}$.	0,000977	$\frac{1}{1536}$.	0,000651		

Ces fractions ont toutes pour numérateur l'unité : les deux premières colonnes renferment les frac-

tions qui viennent de la bisection continuelle de $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{5}$; la troisième contient les valeurs de quelques autres fractions dont les dénominateurs sont impairs.

Lorsqu'une fraction proposée dont le dénominateur est dans la table, aura un numérateur autre que l'unité, on multipliera la fraction décimale de la table par le numérateur; ainsi, pour avoir la valeur de la fraction $\frac{15}{32}$, on multipliera 0,03125 par 15, ce qui donnera 0,46875.

99. Par tout ce que nous venons de dire sur les décimales, il est aisé de sentir que le grand avantage qu'elles procurent à l'arithmétique, est de pouvoir traiter les fractions de la même manière que l'on traite les entiers. Cet avantage est sur-tout sensible dans le nouveau système des poids et mesures où toutes les divisions sont réduites en décimales; ce qui facilite infiniment tous les calculs, et abolit les opérations de l'arithmétique sur les nombres qu'on appelle *complexes*, et qui font le tourment de ceux qui apprennent l'arithmétique. Il n'y a dans l'usage des fractions décimales qu'une difficulté, c'est que leur valeur n'est le plus souvent qu'approchée. En effet, on ne peut exprimer d'une manière exacte, en décimales, que les fractions dont les dénominateurs sont 2, 5, ou un multiple de 2 ou de 5, sans aucun autre facteur. Pour toutes les autres fractions, si on veut les réduire en décimales par la division, l'opération se continue à l'infini; mais il arrive toujours qu'un certain nombre de chiffres du quotient se répètent ensuite à l'infini dans le même ordre. En effet, comme le reste de chaque division est nécessairement moindre que le diviseur, il est clair qu'il ne peut y avoir qu'un certain nombre de restes différens; par conséquent, dès qu'on sera parvenu de nouveau à un même reste, l'opération se continuera de la même ma-

nière, et ainsi de suite à l'infini. On appelle ces fractions *périodiques;* telle est la fraction $\frac{1}{3}$=0,333. Ce seroit sans doute un grand inconvénient, si dans l'usage ordinaire de la vie on étoit astreint à une précision rigoureuse; mais c'est précisément ce qui n'est pas; car dans toutes les divisions, nous avons une limite au-delà de laquelle on ne va pas. Dans les monnoies, on ne va pas au-delà du denier; dans les mesures de longueur, on ne va pas au-delà du pouce ou de la ligne; il n'y a donc qu'à fixer cette limite dans les décimales, suivant la nature des unités que l'on prendra.

Au reste, on peut convertir aisément une fraction décimale en fraction ordinaire, comme on convertit une fraction ordinaire en fraction décimale; on n'a qu'à lui donner le dénominateur qui lui convient, et la réduire ensuite à l'expression la plus simple. Ainsi $0,75 = \frac{75}{100}$; et divisant les deux termes de cette fraction par 25, elle deviendra $\frac{3}{4}$.

100. Quant aux fractions périodiques, on aura leurs valeurs exactes, en considérant à part la partie périodique, et y substituant une fraction ordinaire, dont le numérateur soit formé des chiffres qui composent la période, et dont le dénominateur contienne un égal nombre de 9 mis à la suite l'un de l'autre. Par exemple, la fraction 0,333... se réduit à $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$: ce qu'on peut démontrer de la manière suivante.

En avançant la virgule d'un rang vers la droite, j'ai la fraction 3,333... dix fois plus grande que la proposée; si j'en retranche la proposée, il me restera 3 entiers, quantité 9 fois seulement plus grande que la fraction donnée : donc, si je la divise par 9, j'aurai $\frac{3}{9}$, quantité égale à la fraction donnée 0,333... On en verra une démonstration générale dans l'algèbre.

Si le numérateur et le dénominateur de la fraction

décimale n'avoient pas un diviseur commun, pour la réduire en fraction ordinaire, il faudroit se contenter d'une valeur approchée; et les fractions continues peuvent être d'un grand secours pour cet objet. Ainsi, s'il falloit réduire la fraction décimale 0,253 en fraction ordinaire, je commencerois par la réduire en fraction continue.......

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{20+\cfrac{1}{12}}}}$$

Négligeant la dernière fraction, ou même les deux dernières, il restera $\frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}$ (*a*).

Application des fractions décimales au nouveau système de poids et mesures.

101. Depuis long-temps des hommes éclairés avoient senti la nécessité de réformer en France les poids et mesures, pour substituer au nombre prodigieux de celles qui existent, un système simple et uniforme, dont les divisions se prêtassent le plus facilement au calcul, et qui dérivât d'une mesure fondamentale indiquée par la nature. Trois unités pouvoient remplir ces conditions: la longueur du pendule, un quart de la circonférence de l'équateur, ou un quart de celle du méridien. Des raisons particulières déduites de la généralité du système qu'on propose, ont fait adopter ce dernier pour une unité réelle, et la dix millionième partie de cet arc pour unité usuelle. On a donc mesuré ce quart du méridien, à l'aide de la géométrie et de la physique, et

---

(*a*) Dans l'exemple cité, il eût été plus simple de remarquer que $\frac{253}{1000} = \frac{250+3}{1000}$, et négligeant la dernière fraction, on a $\frac{250}{1000} = \frac{1}{4}$.

sa longueur une fois bien déterminée, a servi pour toutes les autres mesures.

102. On distingue cinq espèces de mesures différentes; savoir, 1°. *les mesures linéaires*; 2°. *les mesures agraires ou de superficie*; 3°. *les mesures de solidité ou de capacité*; 4°. *les mesures* qui servent à peser les corps, et qui sont connues sous le nom de *poids*; 5°. *les monnoies.*

Des mesures linéaires.

103. L'arc du méridien qui traverse la France, ayant été mesuré avec toute l'exactitude que peuvent donner les instrumens et les méthodes les plus modernes, on a conclu de cette mesure la distance qui se trouve entre le pole et l'équateur. Cette distance répond à 30794580 pieds : on a divisé cette longueur en dix parties; chacune de ces dix, en dix autres, et ainsi de suite. La septième de ces subdivisions a donné une longueur de 3 pieds 11 lignes et $\frac{44}{100}$, que l'on a adoptée pour mesure usuelle, et à laquelle on rapporte toutes les autres. C'est pour cela qu'on la nomme *mètre*, du mot grec qui veut dire *mesure.*

Le mètre a été subdivisé en dix parties, qu'on a nommées *décimètres*, et chaque décimètre est de nouveau divisé en dix, qu'on nomme *centimètres.*

On a aussi formé des multiples du mètre, de dix en dix, qu'on a désignés par les noms suivans : *décamètre*; *hectomètre*, *kilomètre*, *myriamètre*, &c.

Pour pouvoir mieux juger de leur longueur, en les comparant aux mesures anciennes déjà connues, nous allons les ranger dans le tableau suivant :

Centimètre. Centième partie du mètre, valant un peu plus de 4 lig. et demie.

Décimètre.. Dixième partie du mètre, valant à-peu-près 45 lig. ou 3 pouces 9 lig.

Mètre..... Unité de mesure pour toute la France : c'est la dix millionième partie du quart du méridien : sa longueur est de 3 pieds 11 lig. $\frac{44}{100}$.

Décamètre. Dix fois la longueur du mètre, 30 pieds 9 pouces 6 lig. $\frac{4}{10}$.

Hectomètre. Longueur de cent mètres. Cette mesure sera peu usitée.

Kilomètre.. Longueur de mille mètres, environ 513 toises.

Myriamètre. Sa valeur est de dix mille mètres, environ 5132 toises, ce qui est un peu plus qu'une poste. Les mesures itinéraires s'expriment en myriamètres.

C'est aussi à la grandeur de la terre que se rapportent les mesures de superficie, de capacité, les poids, et les monnoies.

Des mesures agraires ou de superficie (*a*).

104. Les mesures agraires ou de superficie, sont des quarrés dont les côtés sont des multiples ou des sous-multiples du mètre; et une surface qui a un mètre de longueur et un mètre de largeur, sera un mètre carré, et servira pour unité dans la mesure des surfaces.

Une surface carrée, dont chaque côté est de dix mètres, servira pour mesurer les grandes surfaces, comme les jardins, les prés, les champs. On l'a nommée *are*, du mot latin *area*, surface.

(*a*) Les mesures agraires et de solidité doivent être traitées dans la géométrie ; nous n'en parlons ici, que pour montrer leur analogie avec le système décimal et leur dépendance du mètre; d'ailleurs ce que nous en disons ne suppose d'autres connoissances géométriques, que la notion d'un quarré et d'un cube.

L'are a été subdivisé en dix et en cent parties, connues sous le nom de *déciare*, *centiare*.

On a aussi formé des multiples de l'are, de dix en dix, auxquels on a donné les noms de *déca-are*, *hectare*, *myriare*, &c. On trouvera ces noms dans le tableau suivant, ainsi que le rapport de ces mesures avec les anciennes.

Centiare. La centième partie de l'are : sa valeur est un mètre carré.

Déciare. La dixième partie de l'are : sa valeur est équivalente à dix mètres carrés.

Are.... Unité de mesure pour l'arpentage : c'est un carré ayant dix mètres de longueur et dix mètres de largeur. Il est l'équivalent d'environ 25 toises carrées.

Déca-are. Dix ares, ou environ 250 toises carrées : il ne sera guère en usage.

Hectare. C'est une superficie contenant cent ares : il peut être employé pour l'évaluation des terreins d'une certaine étendue : sa valeur est un peu moins que le double du grand arpent de cent perches carrées.

Myriare. C'est une étendue de dix mille ares, équivalente à-peu-près à deux cents arpens, propre à mesurer les territoires considérables, tels que ceux des communes, des cantons, &c.

Des mesures de capacité ou solidité.

105. L'unité de mesure pour les solides ou les capacités, seroit naturellement le mètre cube ; mais on ne pourroit s'en servir que pour mesurer de grands volumes. On a préféré prendre pour unité usuelle le décimètre cube, qu'il ne faut pas confondre avec la dixième partie du mètre cube. Pour

la désigner, on a adopté le mot de *litre*, qui représentoit une pareille mesure chez les Grecs. Ses fractions décimales seront par conséquent les *décilitres*, *centilitres*; et ses multiples des *décalitres*, *hectolitres*, *kilolitres*. En voici le tableau :

Centilitre. Ou centième partie du litre, est une mesure qu'on peut comparer aux petits verres pour la liqueur ou l'eau-de-vie.

Décilitre. Ou dixième partie du litre; c'est à peu-près l'équivalent d'un gobelet ordinaire.

Litre.... Sa capacité est celle d'un décimètre cube; il diffère peu de la pinte de Paris, et servira aux mêmes usages, soit pour les liquides, soit pour les graines.

Décalitre. Ou dix litres, peut tenir lieu du boisseau pour la mesure du bled et de toutes sortes de graines.

Hectolitre. Ou cent litres, peut servir pour mesurer plusieurs matières sèches, telles que les grains, le sel, le charbon.

Kilolitre... Capacité égale au mètre cube; c'est à-peu-près le tonneau de mer d'aujourd'hui.

Le mètre cube, employé à mesurer les solides comme les bois de chauffage, une masse de mâçonnerie, &c. prend le nom de *stere*, du mot grec *στερεως*, qui veut dire solide.

Des poids.

106. Un poids égal à celui de l'eau distillée, sous le volume d'un centimètre cube, s'appelle *gramme*, du mot grec *γραμμα*. Ses fractions décimales sont nommées *décigrammes*, *centigrammes*..., et ses mul-

tiples, *décagrammes*, *hectogrammes*, *kilogrammes*, *myriagrammes*. Le tableau suivant va en présenter la nomenclature et la comparaison avec les mesures connues.

Centigramme. Poids cent fois moindre que le gramme, environ un cinquième de grain.

Décigramme.. Dixième partie du gramme, pèse un peu moins que deux grains. Ces deux divisions seront très-en usage dans la pharmacie, et chez les lapidaires pour la pesée des diamans, &c.

Gramme..... Equivaut au poids de l'eau pure, sous le volume d'un centimètre cube, ce qui fait à-peu-près dix-neuf grains. Il est très-propre pour servir d'unité dans la pesée des matières précieuses, telles que l'or, l'argent, &c.

Décagramme. Poids de dix grammes; son double est un peu moins que les deux tiers d'une once.

Hectogramme. Poids de cent grammes, à-peu-près trois onces et demie.

Kilogramme.. Poids de mille grammes, très-commode pour la vente des matières les plus communes; c'est à-peu-près deux livres d'aujourd'hui.

Myriagramme. Poids de dix mille grammes, un peu plus que vingt livres d'aujourd'hui. On s'en servira pour les plus grandes pesées qu'on sera dans le cas de faire dans l'usage ordinaire.

Des Monnoies.

107. L'unité monétaire qui s'appelle *franc*, se divise en dix parties appelées *décimes*, et le décime, en dix parties appelées *centimes*. Le poids du franc est de cinq grammes d'argent, à l'alliage d'un dixième. Il en résulte que le *franc* vaut au moins $1\frac{1}{4}$ pour $\frac{0}{0}$ de plus que la *livre tournois*, c'est-à-dire, 20 sous 3 deniers. Ainsi la pièce de cinq *francs* vaut 5 *livres* 1 sou 3 deniers de l'ancienne monnoie; et l'écu de 6 *livres* de l'ancien système ne vaut que 5 *francs* 93 centimes à-peu-près.

Centime. La centième partie du franc ou de l'unité de monnoie : sa valeur est à-peu-près 2 deniers.

Décime. La dixième partie du franc, équivaut à-peu-près à 2 sous.

Franc.. Unité principale de la monnoie, qui vaut 3 deniers de plus que la livre tournois.

Ces notions préliminaires étant une fois établies, les opérations de l'arithmétique sur ces nouvelles divisions ne peuvent souffrir aucune difficulté : ce sont en général celles que nous avons expliquées dans les décimales. Nous nous contenterons de donner ici quelques exemples; les principes sont assez détaillés (n°s. 88 *et suivans*).

De l'addition des francs, décimes et centimes.

105. *Exemple.* On propose d'ajouter:

642 francs	9 décimes	4 centimes,	ou 542$^{fr.}$,94
48	6	8	ou 48, 68
357	8	5	ou 357, 85
427	0	7	ou 427, 07.
		Total...	1376, 54 (*a*).

(*a*) Les décimales de la somme sont 5 décimes et 4 centi-

Addition

De l'addition des Mesures de longueur pour les étoffes.

Exemple. On demande la longueur totale des étoffes suivantes :

La 1re de 46 mètres	8 décimètres	5 centimètres	, ou 46 mètres	,85
La 2e de 32	5	9	ou 32 ,	59
La 3e de 40	3	8	ou 40 ,	38
La 4e de 27	7	3	ou 27 ,	73
		Total....	147	55

De l'addition des Poids.

Exemple. On demande le poids total des quatre pesées suivantes :

La 1re 64 grammes	7 décigrammes	8 centigrammes	, ou 64 gram.	,78
La 2e 27	3	2	ou 27 ,	32
La 3e 28	3	4	ou 28 ,	34
La 4e 78	4	9	ou 78 ,	49
		Total....	198 ,	93

De la soustraction des francs, décimes et centimes.

106. *Exemple.* Une personne a reçu 352 fr.,73
il doit payer........................ 278 , 89

Reste....... 73 , 84

---

mes; mais on ne doit jamais donner de nom, dans une même suite de chiffres, qu'à une espèce d'unité : ainsi, on ne dira pas 5 décimes et 4 centimes, mais 54 centimes : on en dira autant des autres espèces d'unités.

De la soustraction des mesures de longueur.

Exemple. Quelle est la différence des deux mesures suivantes ?

La première 39 mèt.	8 déc.	5 cent.	ou 39 mèt.,	85
La seconde 21	9	8	ou 21 ,	98
Reste.......			17 ,	87

De la Soustraction des poids.

Exemple. Un vase vide pèse 3 gr. 5 décig. 2 centig. On le remplit de liquide, et il pèse 27 gr. 6 déc. 5 cent. Quel est le poids du liquide ?

Le vase plein pèse	27 gram.,	65
Le vase vide pèse................	3 ,	52
Reste	24 ,	13

De la Multiplication.

107. *Premier exemple.* Quel seroit le prix de 28 mèt. de drap 3 décimèt. et 5 centimèt. à raison de 24 fr. 5 déc. 3 cent. ?

Multipliez..........	24 fr.,	53
par	28 ,	35
Produit....	695 ,	4255

Négligez les deux derniers chiffres, et écrivez 695 fr. 43.

Second exemple. Combien coûteroient 34 gram. 2 décigr. 7 centigr. à raison de 3 fr. 3 déc. et 5 cent. par gramme.

Multipliez	34 fr.,	27
par.................	3 ,	35
Produit	114 ,	8

De la Division.

108. *Premier exemple.* 38 mètres 57 centimèt. ont coûté 245 fr. 83 cent. Combien coûte le mètre?

Divisez 245 fr. 83 cent. par 38, 57; le quotient est 6 fr. 37 cent.

Second exemple. Une certaine quantité de marchandise du poids de 12 myriagrammes, 3 kilogrammes et 4 hectogrammes a coûté 25 fr. 54 c. On demande combien coûte le myriagramme. Divisez 25,54 par 12, 34 : le quotient est 2 fr. 07 c. (*a*)

Des puissances et des racines.

109. On appelle puissance d'un nombre, le produit de ce nombre, multiplié par lui-même un certain nombre de fois.

Pour exprimer ces divers produits, on nomme *première puissance* d'un nombre, le nombre lui-même. On nomme *seconde puissance* ou *quarré*, le produit du nombre multiplié par lui-même. Ainsi $3 \times 3 = 9$ est la seconde puissance, ou le quarré de 3.

La troisième puissance, ou le *cube* d'un nombre, est le produit de ce nombre multiplié par lui-même deux fois. Ainsi $3 \times 3 \times 3 = 27$ est le cube, ou la troisième puissance de 3.

(*a*) Ceux qui voudront plus de détail sur les calculs relatifs au nouveau système, le trouveront dans l'instruction publiée par la commission temporaire des poids et mesures; mais nous devons avertir que la nomenclature adoptée dans cet ouvrage a été changée en grande partie par la loi du 18 germinal an 3. Il importe de faire les corrections avant la lecture de l'ouvrage, ce qui ne change rien à la théorie ni à le pratique du calcul.

On formeroit de même la quatrième, la cinquième... &c. puissances d'un nombre, en le multipliant par lui-même trois fois, quatre fois .....&c. Souvent même, au lieu d'effectuer les multiplications, on se contente de les indiquer, en mettant un petit chiffre qui marque le degré de la puissance à côté du nombre; ainsi 8^4 signifie que 8 doit être élevé à la quatrième puissance, ou qu'il doit être quatre fois facteur. Le chiffre, mis à côté du nombre, s'appelle *l'exposant;* il indique la puissance. Ainsi 4 est l'exposant de la quatrième puissance. On verra donc facilement que, dans les deux séries suivantes, chaque terme de l'inférieure est la valeur du terme correspondant de la supérieure.

1	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
1	10	100	1000	10000	100000	1000000

110. On appelle *racine* d'une puissance, le nombre qui, multiplié par lui-même un certain nombre de fois, a produit la puissance; et on les distingue en *racine première*, *racine seconde* ou *quarrée*, *racine troisième* ou *cubique*, etc.; ainsi,

La racine quarrée de 9 est 3, parce que $3\times3=9$.

La racine cubique de 64 est 4, parce que $4\times4\times4=64$.

Les deux règles par lesquelles on forme les puissances et les racines, s'appellent *l'exaltation* et *l'extraction.* La première ne diffère de la multiplication ordinaire, qu'en ce que tous les facteurs y sont égaux. La seconde tient aussi de près à la division; mais elle a des difficultés particulières, en ce qu'il s'agit de trouver un quotient sans connoître le diviseur.

111. Toutes les questions qu'on peut proposer

sur les puissances, se réduisent aux deux suivantes, dont l'une est l'inverse de l'autre.

1°. Etant donné un nombre, déterminer telle puissance qu'on voudra de ce nombre.

2°. Etant donné un nombre, considéré comme une certaine puissance, en trouver la racine.

La première question n'a aucune difficulté; car il ne s'agit pour la résoudre, que de multiplier le nombre donné par lui-même, un certain nombre de fois. Ainsi le carré de 12 est $12 \times 12 = 144$; son cube est $12 \times 12 \times 12 = 1728$, &c.

Quant à la seconde question, elle est beaucoup plus difficile, et demande, pour être résolue, des règles particulières; parce que, quoique tout nombre puisse être élevé au carré, au cube, il n'est pas vrai réciproquement que tout nombre soit un quarré, un cube exact. Le nombre 2, par exemple, n'est pas un quarré, parce que le quarré de 1 est 1, et le quarré de 2 est 4 : n'y ayant pas d'autres nombres entiers intermédiaires, on ne peut pas trouver un nombre entier, ni même fractionnaire, qui, multiplié par lui-même, produise 2; c'est-à-dire que la racine quarrée de 2, n'a aucune mesure commune avec l'unité : on nomme ces racines, *irrationnelles* ou *incommensurables*.

Nous allons donner les règles pour extraire seulement les racines quarrées, parce qu'elles sont d'un usage indispensable dans l'arithmétique, et nous renverrons à l'algèbre, pour donner la méthode générale applicable à une racine quelconque.

112. C'est en apprenant à former les puissances, qu'on apprend à extraire les racines; parce que, quand on connoît bien tous les différens produits qui entrent dans la formation d'une puissance, il n'est pas difficile de trouver la règle à suivre pour en avoir la racine.

Avant d'extraire la racine quarrée d'un nombre, voyons comment se composent les quarrés.

Je prends pour exemple 12, qui est composé d'une dixaine et de deux unités : pour l'élever à son quarré, il faut le multiplier par lui-même, suivant les règles ordinaires. J'écris donc ... Je multiplie premièrement 2 par 2 : le produit est 4. Secondement, 2 par 1, le produit est 2. Troisièmement, 2 par 1, le produit est 2. Quatrièmement, 1 par 1, le produit est 1. Or, il est visible que la première multiplication donne le quarré des unités ; la seconde donne le produit des dixaines par les unités ; la troisième donne encore le produit des dixaines par les unités ; la quatrième donne le quarré des dixaines : et parce que ces produits sont indépendans du systême décimal, ils auraient également lieu dans tout autre systême. Je puis donc écrire les produits dans l'ordre suivant $100+2\times20+4$.

$$\begin{array}{r} 12 \\ 12 \\ \hline 24 \\ 12 \\ \hline 144 \end{array}$$

Si l'on décomposoit 12 en $9+3$, ou $8+4$, son quarré contiendroit également, 1°. le quarré de la première partie ; 2°. le double produit de la première par la seconde ; 3°. le quarré de la seconde. Ce que nous venons de dire pour le nombre 12, s'applique également à tout nombre composé de dixaines et d'unités.

Le quarré des unités ne pourra jamais contenir que des dixaines et des unités ; car le quarré de 9 est 81. Le quarré des dixaines ne pourra contenir que des centaines et des mille ; car le quarré de 90 est 8100. Le double produit des dixaines par les unités, ne contiendra pas d'unités : donc, 1°. le quarré d'un nombre composé de dixaines et d'unités, ne pourra jamais être composé de plus de quatre chiffres ; 2°. si on le partage en tranches composées de deux chiffres chacune, en allant de droite à

gauche, le quarré des dixaines se trouvera dans la dernière tranche à gauche, qui ne sera composée que d'un seul chiffre, lorsque le quarré n'en contiendra que trois. Le quarré des unités se trouvera dans la seconde tranche; le double produit des dixaines par les unités, pourra se trouver dans la première et dans la seconde, mais ne se trouvera pas dans le dernier chiffre de la seconde tranche. Ces observations vont nous guider pour extraire la racine quarrée de 1849.

18,49	43
16	83
24,9	
24,9	
00,0	

Je partage ce nombre en tranches de deux chiffres chacune. La tranche 18 doit contenir le quarré des dixaines; j'extrais donc la racine du plus grand quarré contenu dans 18, qui est 16. Cette racine est 4 : je l'écris à côté du nombre, en les séparant par une ligne; pour savoir ce qui reste, j'élève 4 à son quarré, ce qui donne 16 : je soustrais 16 de 18, il reste 2, à côté duquel j'abaisse la tranche suivante, ce qui donne 249. Le double produit des dixaines que je connois, par les unités, que je ne connois pas encore, doit se trouver dans 24. Je double les dixaines déjà trouvées, ce qui donne 8, que j'écris comme diviseur au-dessous de la racine. Je divise 24 par 8, le quotient est 3, que j'écris à côté du 4. Il peut se faire que 3 ne soit pas le véritable chiffre des unités : pour m'en assurer, je l'écris en même temps à côté du diviseur 8, et je multiplie 83 par 3. Le produit doit pouvoir se soustraire de 249; car 83×3 donnera nécessairement le produit du double des dixaines 4 par les unités 3, plus le quarré des unités. Or, un pareil produit doit être contenu dans 249 : donc on doit pouvoir l'en soustraire. (Si le produit étoit trop grand, on diminueroit le chiffre 3 d'une unité, et l'on essaieroit le 2). Je vois

que $83 \times 3 = 249$; donc la racine de 1849 est 43 sans reste : c'est-à-dire que le nombre proposé est un quarré parfait.

Je prends pour second exemple 469, composé de centaines, de dixaines et d'unités. Pour l'élever à son quarré, il faudroit le multiplier par lui-même selon les règles ordinaires ; mais il est plus simple de remarquer qu'il peut se décomposer en $400 + 60 + 9$. Or, en multipliant ce nombre par lui-même, on aura un produit composé, 1°. du quarré de $400 = 160000$; 2°. du double produit de 400 par $60 = 2 \times 24000$; 3°. du double produit de 400 par $9 = 2 \times 3600$; 4°. du double produit de 60 par $9 = 2 \times 540$; 5°. du quarré de $60 = 3600$; 6°. enfin, du quarré de $9 = 81$. Total $= 219961$, quarré de 469.

Le quarré des centaines ne peut contenir que des dixaines de mille et des centaines de mille ; donc il doit se trouver dans les deux derniers chiffres à gauche. Le double produit des centaines par les dixaines, ne peut donner des nombres plus petits que des mille ; donc il ne peut se trouver que dans les trois derniers chiffres. Ces réflexions, jointes à celles que nous avons déjà faites plus haut, suffisent pour pouvoir extraire la racine quarrée de 219961.

21,99,61	469
16	86
599	929
516	
8361	
8361	
0000	

Je partage ce nombre en tranches de deux chiffres chacune ; je cherche ensuite le plus grand quarré contenu dans 21 : c'est 16. La racine de 16 est 4, que j'écris à côté du nombre, comme on le voit dans l'exemple : j'élève 4 à son quarré, que je retranche de 21, pour avoir le reste 5 à côté duquel j'abaisse la tranche suivante, ce qui donne 599. Je marque d'un point le dernier chiffre. Le double produit des centaines

que je connois, par les dixaines que je ne connois pas, doit se trouver dans 59 : je double les centaines 4 trouvées à la racine, ce qui donne 8, que j'écris comme diviseur au-dessous des chiffres de la racine : je divise 59 par 8, le quotient est 6 : je l'écris à la racine, et à côté du diviseur ; je multiplie 6 par 86, et je soustrais le produit de 59, j'ai le reste 83.

Jusqu'ici, l'opération est la même que lorsque la racine n'est composée que de dixaines et d'unités. Pour trouver le troisième chiffre, je suppose la racine composée de 46 dixaines que je connois ; plus, d'un nombre d'unités que je ne connois pas, et 219961 sera composé du quarré de 46 dixaines =211600 ; plus, du double produit de 46 dixaines par les unités ; plus du quarré des unités. Si de 219961 je retranche 211600, il reste 8361. Ce qui avertit qu'à côté du reste 83, qu'on a trouvé ci-dessus, il faut abaisser la troisième tranche. Je marque d'un point le dernier chiffre, et les trois précédens contiendront le double produit des chiffres déjà trouvés par le troisième. Je prends donc 92, double de 46, pour nouveau diviseur : je divise 836 par 92 ; le quotient est 9, que j'écris à la racine et à côté du diviseur : je multiplie 9 par 929 ; le produit est 8361. Soustraction faite, il ne reste rien ; donc, &c.

Soit proposé d'extraire la racine de 3744225.

Je partage ce nombre en tranches de deux chiffres chacune, excepté la dernière qui n'en a qu'un. Cette dernière ne peut contenir que le quarré des mille de la racine, et une partie du double produit des mille par les centaines. J'extrais donc la racine du plus grand quarré contenu dans 3.

3,74,42,25	1935
1	29
274	383
261	3865
1342	
1149	
19325	
19325	
00000	

Ce quarré est 1, et sa racine 1 dont le quarré soustrait de 3, donne 2 de reste. Je trouve successivement les deux chiffres suivans par le même procédé que dans l'exemple précédent. Après avoir trouvé 193 à la racine, et en avoir soustrait partiellement son quarré des trois premières tranches du nombre proposé, on a pour reste 193.

On peut donc regarder la racine comme composée de 193 dixaines que l'on connoît, plus, un nombre d'unités qu'on ne connoît pas encore : et le quarré de cette racine sera composé du quarré des dixaines, du double produit des dixaines par les unités, et du quarré des unités. Si du nombre proposé on retranche le quarré des 193 dixaines, on a pour reste 19325 ; ce qui avertit qu'à côté du reste 193, trouvé ci-dessus, il faut abaisser la quatrième tranche. Je marque d'un point le dernier chiffre, et je remarque que les quatre premiers doivent contenir le double produit des 193 dixaines par les unités ; je double donc 193, et je divise 1932 par 386 ; le quotient est 5, que j'écris à la racine, et à côté du diviseur, je multiplie 5 par 3865, pour faire la soustraction, il ne reste rien ; donc la racine exacte est 1395.

En poussant plus loin l'analogie, on verroit que les quatre premiers chiffres d'une racine composée de cinq, se trouveroient par les mêmes procédés que dans l'exemple précédent. Considérant ensuite la racine partagée en deux parties, dont la première seroit les chiffres déjà trouvés, et la seconde le chiffre des unités, pour trouver ce dernier, on feroit le même raisonnement que ci-dessus.

On voit par tout ce que nous avons dit sur l'extraction des racines quarrées, que, quand on sait extraire la racine d'un nombre composé de deux chiffres, il est aisé de l'extraire d'un nombre com-

posé de trois ou quatre; quand on sait l'extraire de celui-ci, il est aisé de l'extraire d'un nombre composé de 5 ou de 6, et ensuite de 7 ou de 8. On peut donc établir la règle suivante :

Règle générale.

113. *Partagez le nombre donné en tranches de deux chiffres chacune; extrayez la racine du plus grand quarré contenu dans la première tranche; écrivez cette racine à côté du nombre, dont elle sera séparée par une ligne horizontale; élevez cette racine à son quarré, que vous retrancherez de la première tranche : à côté du reste, abaissez la seconde tranche, et marquez par un point le dernier chiffre; divisez les précédens par le double du chiffre déjà trouvé à la racine; écrivez le quotient à côté de la racine et à côté du diviseur; multipliez le dernier chiffre mis à la racine par le diviseur ainsi augmenté, et retranchez le produit de tous les chiffres composant le second membre de division : à côté du reste, abaissez la tranche suivante; marquez par un point le dernier chiffre, et divisez les précédens par le double des deux chiffres déjà trouvés à la racine : continuez ainsi, jusqu'à ce que vous ayez abaissé la dernière tranche; et observez qu'on change de diviseur, à mesure qu'on abaisse une tranche, et qu'il est toujours le double de tous les chiffres déjà trouvés à la racine.*

114. Lorsque le nombre dont on se propose d'extraire la racine n'est pas un quarré parfait, on ne peut en trouver la racine exacte. Dans ce cas, on détermine, par la méthode que nous venons d'exposer, la racine du plus grand quarré contenu dans le nombre proposé; et si l'on veut avoir la racine avec

plus de précision, on se sert des décimales, et l'on approche alors autant qu'on veut de la valeur exacte de la racine.

Exemple. On demande la racine de 342, à un centième près.

Je commence par ajouter quatre zéros à côté de 342, ou, ce qui revient au même, je multiplie 342 par 10000 : donc la racine sera cent fois trop grande. Je séparerai par une virgule deux chiffres à droite de la racine, je la rendrai ainsi cent fois plus petite : donc elle sera à sa juste valeur, comme on peut le voir dans l'exemple suivant, où l'on voit que la racine est 18,49 ; en sorte que ce qu'on néglige ne vaut pas un centième. Si on vouloit pousser l'approximation plus loin, on mettroit encore deux zéros à côté du dernier reste, et l'on continueroit l'opération. La raison en est évidente, d'après ce que nous avons dit ci-dessus ; car toutes les fois qu'on met deux zéros à côté du dernier reste, on rend le quarré cent fois plus grand qu'il n'est, et par conséquent la racine dix fois plus grande ; mais en plaçant le chiffre après la virgule, elle se trouve dix fois plus petite ; donc, &c.

```
3,42,00,00 | 18,49
1          |-----
242        | 28
 1800      | 364
 1456      | 3689
  34400
  33201
   1199
```

Second exemple. On demande la racine approchée de 2.

Sans mettre les zéros à côté de 2, je me contente d'en ajouter deux à côté de chaque reste de la racine, après en avoir extrait les entiers ; et je procède toujours par les mêmes règles. Si on ne prend qu'une décimale, la racine est 1,4 à un dixième

près. Si on prend deux décimales, la racine est 1,41 à un centième près. Si on prend trois décimales, la racine est 1,414 à un millième près; et si on avoit voulu pousser l'approximation plus loin, on auroit mis deux zéros à côté de 604, et on auroit continué en suivant les mêmes règles.

2	1,414
1	24
100	281
96	2824
400	
281	
11900	
11296	
604	

Ces exemples suffisent pour faire sentir l'utilité des décimales dans la recherche des racines approchées des nombres qui ne sont pas des quarrés parfaits.

Jusqu'ici nous ne nous sommes occupés que de l'exaltation et de l'extraction des nombres entiers; mais il est aisé d'étendre aux nombres fractionnaires les règles que nous avons données. En effet, pour multiplier une fraction par une autre, il faut multiplier numérateur par numérateur, et dénominateur par dénominateur (67). Par conséquent, pour élever une fraction à son quarré, il faut y élever séparément son numérateur et son dénominateur : ainsi le quarré de $\frac{3}{4}$ est $\frac{9}{16}$, celui de $\frac{12}{13}$ est $\frac{144}{169}$.

115. Pour avoir la racine d'une fraction, il faut extraire séparément celle du numérateur et celle du dénominateur : ainsi la racine de $\frac{4}{9}$ est $\frac{2}{3}$, celle de $\frac{16}{25}$ est $\frac{4}{5}$, et celle de $\frac{121}{144}$ est $\frac{11}{12}$.

Il est rare de trouver des fractions dont le numérateur et le dénominateur soient des quarrés exacts. Dans ce cas, on fait en sorte que le dénominateur devienne un quarré parfait; ce que l'on obtient en multipliant les deux termes de la fraction par le dénominateur. La racine du dénominateur ainsi multiplié, sera le dénominateur premier : quant au numérateur, il ne sera pas un quarré parfait; mais on en

cherchera la racine approchée par le moyen des décimales.

Exemple. On demande la racine quarrée de la fraction $\frac{5}{11}$. Je multiplie le numérateur et le dénominateur par 11, ce qui donne $\frac{55}{121}$; la racine du dénominateur est évidemment 11; la racine approchée du numérateur est 7,41 : donc la racine que l'on cherche est à-peu-près $\frac{7,41}{11}$.

La méthode la plus simple et la plus commode pour approcher de la racine d'une fraction dont les deux termes ne sont pas des quarrés parfaits, consiste à les réduire en décimales, comme dans l'exemple suivant :

Soit la fraction $\frac{3}{7}$ dont je veux avoir la racine avec deux décimales. Je réduis la fraction $\frac{3}{7}$ en décimale, et je pousse l'approximation jusqu'aux dix millièmes; elle devient 0,4285 : j'extrais la racine de ce nombre, et j'ai 0,65; qui est la racine de $\frac{3}{7}$, à un centième près. On peut donc établir la règle suivante :

Divisez le numérateur par le dénominateur, et poussez la division par décimales, jusqu'à ce que vous ayez au quotient deux fois autant de décimales que vous voulez en avoir à la racine : tirez la racine de ce quotient, comme s'il n'avoit pas de chiffres décimaux, et quand vous l'aurez trouvée, séparez vers la droite par une virgule un nombre de chiffres égal à la moitié de celui du quotient qui exprime la valeur de la fraction proposée.

Des raisons ou rapports ; des proportions et progressions.

116. Dans la première partie de l'arithmétique, nous avons considéré les nombres en eux-mêmes,

ou plutôt nous avons considéré le rapport que chaque nombre a avec la quantité de même nature, prise pour unité de comparaison. Dans les fractions, nous nous sommes occupés des rapports que les différens nombres de même nature ont entr'eux ; car la valeur des fractions consiste essentiellement dans le rapport du numérateur au dénominateur ; il s'agit, dans cet article, de comparer entr'eux les différens rapports, pour en connoître la nature et les propriétés.

117. Puisque tout rapport suppose une comparaison, il y a autant d'espèces de rapports que de manières différentes de comparer entre elles deux quantités. Or, on peut comparer entre elles deux quantités de deux manières différentes, pour savoir de combien l'une est plus grande que l'autre, ou combien de fois l'une contient l'autre. Il y a donc deux rapports différens ; on trouve le premier en retranchant la plus petite quantité de la plus grande ; et on le nomme *rapport arithmétique*. On trouve le second en divisant une des quantités comparées par l'autre ; et on le nomme *rapport géométrique*.

118. Tout rapport est composé de deux termes ; le premier est nommé *antécédent* ; le second est appelé *conséquent*.

119. Le rapport, arithmétique ou géométrique, peut être simple ou composé ; le rapport simple est celui qui existe entre deux nombres premiers.

Si l'on a plusieurs rapports arithmétiques, et que l'on prenne la somme de tous les antécédens et celle de tous les conséquens, et qu'on retranche l'une de l'autre, on aura un rapport arithmétique composé. Si on ne prend que deux rapports simples égaux, le rapport composé est un rapport doublé ;

si on en prend trois égaux, le rapport est triplé.

Si on a plusieurs rapports géométriques, qu'on multiplie entr'eux les antécédens, et ensuite les conséquens, et qu'on divise un produit par l'autre, on aura un rapport géométrique composé; et si les deux rapports composans sont égaux, le rapport géométrique est un rapport doublé; si on a trois rapports composans égaux, le rapport est dit triplé.

On est convenu d'indiquer le rapport arithmétique d'un nombre à un autre, par le moyen d'un point placé entre les deux nombres. Ainsi 3.7 exprime le rapport arithmétique de 3 à 7, et 8.11, celui de 8 à 11.

Pour marquer le rapport géométrique de deux nombres, on met deux points entre les deux nombres; ainsi 4 : 2, désigne le rapport géométrique de 4 à 2; et 9 : 3, celui de 9 à 3.

120. Dans tout rapport arithmétique, le conséquent est égal à l'antécédent, augmenté ou diminué de la différence; car on trouve le rapport arithmétique en retranchant le plus petit nombre du plus grand. Si le conséquent est plus grand que l'antécédent, il faut retrancher l'antécédent du conséquent, pour avoir la différence; mais dans toute soustraction, si on ajoute la différence à la plus petite quantité, on a la plus grande; donc le conséquent est égal à l'antécédent, augmenté de la différence.

Si le conséquent est plus petit, il faut retrancher le conséquent de l'antécédent, pour avoir la différence; donc le conséquent est égal à l'antécédent, diminué de la différence.

121. Si on augmente ou si on diminue les deux termes d'un rapport arithmétique de la même quantité, le rapport ne change pas de valeur; car la valeur d'un rapport arithmétique consiste dans la différence

différence des deux termes du rapport; or, cette différence ne change pas soit qu'on augmente ou qu'on diminue les deux termes de la même quantité; donc, etc.

122. Dans tout rapport géométrique, l'antécédent est égal au conséquent, multiplié ou divisé par le quotient; car on trouve le rapport géométrique en divisant l'antécédent par le conséquent, ou le conséquent par l'antécédent : or, dans toute division, le dividende est égal au diviseur multiplié par le quotient. Donc, lorsque l'antécédent est le dividende, il est égal au conséquent, multiplié par le quotient : et lorsqu'il est le diviseur, il est égal au dividende, divisé par le quotient (*a*).

123. Si on multiplie, ou si on divise les deux termes d'un rapport géométrique par le même nombre, on ne change pas la valeur du rapport : car la valeur du rapport consiste dans le quotient des deux nombres divisés l'un par l'autre. Or, le quotient ne change pas, soit qu'on multiplie ou qu'on divise le dividende et le diviseur par le même nombre; donc, etc.

Des proportions.

124. De même qu'on compare deux grandeurs, d'où résulte un rapport ou une raison, on peut aussi comparer deux rapports, d'où résulte une proportion, lorsque les deux rapports comparés sont égaux.

Chaque rapport ayant deux termes, la proportion en a essentiellement quatre : le premier et le

(*a*) Il est indifférent, pour connoître le rapport qui existe entre deux nombres, de diviser l'antécédent par le conséquent, ou le conséquent par l'antécédent, pourvu que dans le même calcul on suive toujours la même méthode dans la manière d'évaluer les rapports; on se sert plus communément de la division du conséquent par l'antécédent.

dernier sont nommés les extrêmes ; le second et le troisième sont nommés les moyens.

Lorsque les deux rapports égaux sont arithmétiques, la proportion est arithmétique ; et lorsque les deux rapports égaux sont géométriques, la proportion est dite géométrique.

Pour écrire une proportion arithmétique, on écrit les deux rapports à la suite l'un de l'autre, en les séparant par trois points disposés en triangle, comme dans l'exemple suivant : 3.5 ·.· 7.9, ce qui s'énonce ainsi : 3 est à 5, comme 7 est à 9.

Lorsque la proportion est géométrique, on sépare les deux rapports par quatre points disposés en quarré, comme dans la suivante : 2 : 4 :: 3 : 6 ; ce qui veut dire 2 est à 4 comme 3 est à 6.

Dans l'une et l'autre proportion, si les moyens sont égaux, on peut en supprimer un, et la proportion n'offre plus que trois termes ; mais alors celui du milieu est censé double, et appartenir aux deux rapports ; au premier, comme conséquent, et au second, comme antécédent. Dans ce dernier cas, la proportion est nommée continue, et on l'écrit comme la suivante ∸ 3. 5. 7, que l'on énonce ainsi : comme 3 est à 5, 5 est à 7. Si elle est géométrique, au lieu de trois points on en met quatre ∺. Le terme du milieu est dit moyen proportionnel arithmétique ou géométrique aux deux autres.

Principe fondamental des proportions arithmétiques.

125. Dans toute proportion arithmétique, la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens (a).

(a) Un grand géomètre regarde comme très-impropre la

Prenons une proportion arithmétique quelconque, pour nous servir d'exemple : ce que nous dirons de celle-la s'appliquera facilement à toutes les autres.

Soit la proportion 3.5 ∴ 7.9.

Dans toute proportion arithmétique, le conséquent est égal à l'antécédent, augmenté ou diminué de la différence (120) : c'est-à-dire que $5=3+2$, et $9=7+2$: donc toute proportion arithmétique peut se mettre sous la forme suivante : $3.3+2$ ∴ $7.7+2$: or, la somme des extrêmes sera évidemment composée des deux antécédens et de la raison, et la somme des moyens sera également composée des deux mêmes antécédens et de la même raison ; donc les deux sommes seront égales.

126. Réciproquement si on a deux sommes égales, en les considérant, l'une comme la somme des extrêmes, et l'autre comme la somme des moyens, on pourra toujours en faire une proportion arithméti-

---

dénomination de proportions pour ce qu'on appelle proportion arithmétique : il pense que l'idée de proportion est déjà fixée par l'usage, et ne répond qu'à ce qu'on appelle proportion géométrique. Quand on dit qu'une chose doit être proportionnée à une autre, on n'entend par proportion que l'égalité des rapports, comme dans la proportion géométrique, et nullement l'égalité des différences comme dans l'arithmétique. Ainsi, au lieu de dire que les nombres 3, 5, 7, 9 sont en proportion arithmétique, parce que la différence de 5 à 3 est la même que celle de 9 à 7, il vaudroit mieux employer toute autre dénomination, et appeler, par exemple, ces nombres *équidifférens*, en conservant le nom de proportionnels aux nombres qui sont en proportion géométrique. D'ailleurs la proportion appelée arithmétique n'est pas plus arithmétique que celle que l'on nomme géométrique, et celle-ci n'est pas plus géométrique que l'autre ; au contraire, l'idée primitive de la proportion géométrique est fondée sur l'arithmétique, puisque l'idée des rapports vient essentiellement de la considération des nombres.

que ; car si on partage chacune des deux sommes en deux parties, il faudra nécessairement que la plus grande partie de la première somme surpasse la plus grande partie de la seconde somme, de la même quantité que la plus petite partie de la première est surpassée par la plus petite de la seconde. Considérant donc les deux grandes parties comme les deux termes d'un rapport arithmétique, et les deux petites parties comme les deux termes d'un second rapport arithmétique, ces deux rapports seront égaux. Or deux rapports égaux font une proportion; donc, &c. Ainsi de ce que 12 = 12, on aura généralement 9+3 = 7+5 ou 8+4, et il y aura la même différence de 9 à 7 que de 5 à 3, ou de 9 à 8 que de 4 à 3... &c.

127. Si les rapports arithmétiques n'étoient pas égaux, on ne pourroit pas dire que les quatre termes fussent en proportion; mais la somme des extrêmes seroit à la somme des moyens, comme le premier rapport est au second rapport. Ainsi si l'on a les deux rapports inégaux 13.9 et 10.7, on ne peut pas dire 13.9 ∵ 10.7, mais on a 13+7 : 9+10 ∵ 13—9.10—7 ∵ 4.3.

Avant de démontrer cette proposition, il faut observer qu'elle n'est vraie que lorsque les antécédens sont plus grands que les conséquens. Si les conséquens étoient plus grands que les antécédens, il faudroit renverser l'ordre des rapports, et l'on auroit : la somme des extrêmes est à la somme des moyens, comme le second rapport est au premier. Cela posé :

Que les rapports soient égaux ou inégaux, la somme des extrêmes sera composée de la somme des deux conséquens et de la première différence ; la somme des moyens sera composée des deux mêmes conséquens, plus la seconde différence ; donc ces

deux sommes seront entr'elles arithmétiquement, comme les deux différences; c'est-à-dire, comme le premier rapport est au second. Ainsi de la proposition fausse 13.9 ·.· 10.7 on déduit celle-ci qui est vraie 13+7.9+10 ·.· 4.3.

128. Si on ne connoît que trois termes d'une proportion arithmétique, il sera facile de connoître le quatrième. Si c'est un extrême qui soit inconnu, on prendra la somme des moyens, et on en retranchera l'extrême connu; si c'est un moyen, on prendra la somme des extrêmes, et on en retranchera le moyen connu: le reste dans les deux cas sera le terme inconnu.

Si la proportion est continue, la somme des extrêmes est le double du moyen terme.

129. Si l'on a deux proportions arithmétiques, et que l'on ajoute par ordre les quatre termes de la seconde aux quatre termes de la première, les sommes seront en proportion.

Car en ajoutant ainsi les termes, on forme des rapports arithmétiques composés: or les rapports composans sont les mêmes; donc les rapports composés seront égaux. Ainsi des deux proportions arithmétiques 3.5 ·.· 7.9 et 2.6 ·.· 3.7, on peut former celle-ci 5.11 ·.· 10.16.

Des Proportions géométriques.

130. Toute proportion géométrique peut être représentée par deux fractions égales.

Car la proportion géométrique consiste dans l'égalité de deux rapports géométriques; or les rapports géométriques sont exprimés par des fractions (57): donc on a deux rapports égaux lorsqu'on a deux fractions égales. Ainsi les quatre termes

$3:6::4:8$ sont en proportion, parce que $\frac{3}{6}=\frac{4}{8}$, ou $\frac{6}{3}=\frac{8}{4}$.

Le numérateur et le dénominateur de la première fraction forment toujours l'antécédent et le conséquent du premier rapport; le numérateur et le dénominateur de la seconde fraction, forment l'antécédent et le conséquent du second rapport.

Principe fondamental des proportions géométriques.

131. Dans toute proportion géométrique, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.

Car toute proportion géométrique peut être représentée par deux fractions égales. Or si l'on a deux fractions égales, en les réduisant au même dénominateur, leurs numérateurs doivent être égaux : donc en réduisant au même dénominateur les deux fractions qui forment la proportion, leurs numérateurs seront égaux; mais après cette opération, le premier numérateur est évidemment le produit des extrêmes, et le second est le produit des moyens; donc, dans toute proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens : ainsi dans la proportion $2:4::3:6$ on a $\frac{2}{4}=\frac{3}{6}$; donc $\frac{2\times6}{4\times6}=\frac{3\times4}{4\times6}$, ou $2\times6=3\times4$.

132. Réciproquement, si on a deux produits égaux, en considérant un de ces produits comme celui des extrêmes, et l'autre comme celui des moyens, ou en pourra toujours déduire une proportion.

Car divisant les deux produits par un même produit, ayant un facteur de commun avec chacun d'eux, on aura deux fractions égales; donc on pourra en faire une proportion. Ainsi de ce que

$6 \times 8 = 4 \times 12$, en divisant les deux termes par 8×12, on aura $\frac{6}{12} = \frac{4}{8}$; donc on a deux rapports égaux, donc on peut former la proportion $6 : 12 :: 4 : 8$.

133. Si les rapports géométriques n'étoient pas égaux, on ne pourroit pas dire que les quatre termes sont en proportion; mais le produit des extrêmes seroit au produit des moyens, comme le premier rapport est au second.

Car si les rapports ne sont pas égaux, ils seront représentés par deux fractions inégales. Réduisant ces deux fractions au même dénominateur, elles seront entr'elles comme leurs numérateurs: or le numérateur de la première est le produit des extrêmes, et le numérateur de la seconde est le produit des moyens; donc ces deux produits sont entr'eux comme la première fraction est à la seconde fraction, ou comme le premier rapport est au second. Ce dernier article suppose que pour estimer les rapports, on divise l'antécédent par le conséquent; si on divisoit le conséquent par l'antécédent, les deux premiers rapports seroient l'inverse des derniers (*a*).

134. Si on ne connoît que trois termes dans une proportion géométrique, on pourra déterminer le quatrième; car, si c'est un extrême qui soit inconnu, on prendra le produit des moyens, et on le divisera par l'extrême connu; si c'est un moyen qui soit in-

(*a*) Ce dernier théorême est plus général que le principe fondamental que nous avons démontré, puisque celui-ci est un cas particulier de l'autre. En effet, si nous supposons dans le dernier théorême que les deux termes du dernier rapport sont égaux, ce sera supposer que les deux rapports primitifs sont égaux, et donnent par conséquent une véritable proportion; mais dans le dernier théorême, le produit des extrêmes et celui des moyens sont entr'eux comme ces rapports: donc lorsque ces rapports sont égaux, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.

connu, on prendra le produit des extrêmes, et on le divisera par le moyen connu.

135. Dans une proportion continue, le produit des extrêmes est égal au quarré du terme moyen : donc pour trouver la valeur du terme moyen dans une proportion continue, ou, ce qui est la même chose, pour insérer un moyen proportionnel entre deux termes connus, il faut multiplier entr'eux ces deux termes, et extraire la racine quarrée de leur produit. Ainsi, pour insérer un moyen proportionnel entre 2 et 8, on multiplie 2 par 8; le produit est 16; on extrait la racine quarrée de 16, elle est 4 : donc 4 est le terme cherché, c'est-à-dire que 2 : 4 :: 4 : 8.

C'est dans l'application du principe que nous venons de démontrer, et dans la conséquence que nous en avons tirée, que consistent la règle de trois et toutes les règles qui s'y rapportent.

136. Si l'on déplace les termes d'une proportion géométrique, pour leur donner un autre ordre, qui soit cependant tel que le produit des extrêmes reste égal à celui des moyens, les termes seront toujours en proportion.

Il y a sept manières de déplacer les termes d'une proportion géométrique, de telle manière que le produit des extrêmes reste égal au produit des moyens. Celles dont on fait un fréquent usage sont les deux suivantes :

La première se nomme *alternando*, et consiste à mettre les moyens à la place l'un de l'autre. Ainsi, de la proportion 2 : 4 :: 3 : 6, on peut former la suivante 2 : 3 :: 4 : 6.

La seconde consiste à mettre les extrêmes à la place des moyens, et les moyens à la place des extrêmes, ou, ce qui est la même chose, à renverser les deux rapports, mettant le conséquent à la place

de l'antécédent, et réciproquement : on nomme ce changement *invertendo*. Ainsi, de la proportion $2:4::3:6$, on forme celle-ci, $4:2::6:3$.

137. Dans toute proportion géométrique, la somme des antécédens est à celle des conséquens, comme un antécédent est à son conséquent.

Car le rapport de chaque antécédent à son conséquent étant le même, il est visible qu'il ne changera pas, en prenant la somme de ces antécédens, et la comparant à celle des conséquens : donc on pourra en faire une proportion avec un des deux rapports premiers. Ainsi, de ce que dans la proportion précédente 4 est le double de 2, et 6 le double de 3, on aura évidemment $4+6$, double de $2+3$: donc on pourra dire $4+6:2+3::4:2$, ou $::6:3$.

Le même raisonnement auroit lieu pour prouver que la différence des antécédens est à la différence des conséquens, comme un seul antécédent est à son conséquent (*a*).

138. Si on a deux ou plusieurs proportions géométriques, et qu'on les multiplie par ordre, les produits seront encore en proportion.

Car les deux premiers termes de la première, multipliés par les deux premiers termes de la seconde, formeront un rapport composé; semblablement, les deux derniers termes de la première, multipliés par les deux derniers termes de la seconde, formeront un second rapport composé; mais chaque rapport simple qui compose le premier, a son égal dans les deux rapports simples qui composent le se-

(*a*) On peut remarquer que l'article précédent conduit à cette conséquence, que si l'on a deux fractions égales, telles que $\frac{5}{10}$ et $\frac{3}{6}$. La somme, ou la différence de leurs numérateurs, divisée par la somme ou la différence des dénominateurs, forme une fraction égale à la première.

cond; donc les rapports composés sont égaux, donc ils forment une proportion. Le raisonnement seroit le même, si l'on multiplioit par ordre trois, ou un plus grand nombre de proportions. Ainsi, si l'on a les deux proportions 2 : 3 :: 4 : 6 et 5 : 7 :: 15 : 21, on en conclura que $2\times5 : 3\times7 :: 4\times15 : 6\times21$.

139. Si l'on divise par ordre les termes d'une proportion, par les termes d'une autre proportion, les quotiens seront en proportion.

Car on peut supposer que les rapports qui composent la première, sont des rapports composés égaux; donc si on les divise par des rapports simples égaux, les quotiens seront aussi des rapports égaux; donc ils donneront une proportion.

140. Quand on a une proportion, les puissances et les racines de même degrés des quatre termes, sont en proportion : c'est une conséquence des deux derniers articles.

La théorie des proportions que nous venons d'exposer, suffit pour bien entendre les différentes règles particulières qu'on trouve dans les livres d'arithmétique; on les réduit toutes à la règle de trois, quand on sait placer convenablement les termes de la proportion. Nous allons expliquer cette règle, et nous ferons voir ensuite que les règles de compagnie, d'intérêt, de change, d'escompte, de fausse position, de double fausse position, &c. ne sont que de véritables règles de trois.

De la Règle de trois.

141. La règle de trois consiste à trouver le quatrième terme d'une proportion, dont les trois premiers sont donnés. Dans les livres ordinaires d'arithmétique, on a beaucoup compliqué cette règle; on l'a divisée en règle de trois, simple, composée, di-

recte, inverse : toutes ces différentes dénominations se réduisent toujours à une seule règle ; il suffit de bien entendre l'état de la question.

La règle ordinaire de trois s'applique toujours également, toutes les fois qu'une quantité augmente ou diminue, dans le même rapport qu'une autre. Par exemple, le prix des choses augmente en proportion de la quantité des choses, de sorte que la chose étant double, le prix devient double ; si la chose devient triple, le prix devient triple, et ainsi de suite : de même le prix du travail augmente en proportion du nombre des personnes employées. Mais il y a des choses qui augmentent à-la-fois dans deux rapports différens. Par exemple, la quantité du travail augmente suivant le nombre des personnes employées, et il augmente aussi suivant le temps qu'on emploie : il y a des choses qui diminuent à mesure que d'autres augmentent. Tout cela se réduit à une considération bien simple, c'est que, si une quantité augmente en même temps dans la proportion qu'une ou plusieurs autres quantités augmentent et que d'autres diminuent, c'est la même chose que si on disoit que la quantité proposée augmente comme le produit des quantités qui augmentent en même temps qu'elle, divisé par le produit de celles qui diminuent en même temps.

Lorsque les quantités que l'on compare augmentent ou diminuent en même temps et dans le même rapport que leurs correspondantes, cette relation s'appelle raison *directe ;* si, au contraire, les quantités comparées augmentent ou diminuent en même temps et dans le même rapport que leurs correspondantes diminuent ou augmentent, la relation est nommée *inverse :* ainsi, dans les quatre quantités 2, 4, $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$, les deux dernières sont en raison inverse des deux premières.

Toutes les fois donc qu'on aura bien saisi l'état de la question, et qu'on aura exprimé convenablement tous les rapports dont elle est composée, on parviendra à déterminer le terme inconnu, par une même règle de trois, quoiqu'il y ait une infinité de questions plus ou moins compliquées que l'on résout par le moyen de cette règle.

Il faut encore observer que la règle de trois ne s'applique qu'aux choses qui augmentent dans un rapport constant; c'est-à-dire, que les deux rapports qui composent la règle de trois, doivent constamment être égaux. Cette condition est essentielle : si la loi d'augmentation ou de diminution étoit variable, la règle de trois ne s'y appliqueroit pas, et les règles ordinaires de l'arithmétique seroient insuffisantes pour résoudre ces sortes de questions.

Ces considérations suffisent pour faire connoître les moyens de former une règle de trois. Voyons présentement quelles sont en général toutes les questions qui peuvent se résoudre par cette règle.

Toutes les fois qu'il s'agira de découvrir une quantité inconnue, qui, par la nature de la question, devra augmenter ou diminuer dans le même rapport qu'une ou plusieurs autres quantités dont elle dépend augmentent ou diminuent, la question se réduira à une proportion géométrique, dont trois termes seront nécessairement connus.

Exemple. 12 Hommes travaillant ensemble ont fait 18 mètres d'ouvrage; on demande combien en feront 36 hommes travaillant dans le même temps?

L'état de la question avertit naturellement que, plus il y a aura d'hommes, plus ils feront d'ouvrage dans le même temps; ensorte que, si le nombre d'hommes devient deux fois plus grand, l'ouvrage sera aussi deux fois plus grand; et, si le nombre d'hommes devenoit trois ou quatre fois plus grand,

l'ouvrage fait dans le même temps seroit aussi trois ou quatre fois plus grand : donc il y a le même rapport entre l'ouvrage fait et l'ouvrage à faire, qu'entre les 12 hommes et les 36 hommes : on peut donc établir la proportion suivante, $12^{h.} : 36^{h.} :: 18^{m.} : x^{m.}$ (*a*).

Dans toute proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens; donc $12 \times x = 36 \times 18 = 648$. Si on divise le premier terme par 12, et le dernier également par 12, on ne détruira pas l'égalité; on aura donc $x = \frac{648}{12} = 54$ mètres : donc 36 hommes feront 54 mètres d'ouvrage, dans le même temps que 12 en feront 18 mètres, ce qui est d'ailleurs évident.

On voit par cet exemple comment il faut se conduire dans tous les cas pareils. On remarquera que, parmi les quatre quantités qui composent la proportion, il y en a deux d'une espèce, et deux d'une autre espèce. On aura soin de comparer toujours entr'elles les quantités de même espèce, que l'on appelle *homogènes*, du mot grec qui veut dire de même nature. Ainsi, on comparera les hommes aux hommes, les mètres aux mètres, l'argent à l'argent, les capitaux aux capitaux, les intérêts aux intérêts... &c. on prendra le produit des moyens, et on le divisera par l'extrême connu.

Second exemple. Si 3 myriagrammes coûtent 6 francs 3 décimes, combien coûteront 30 myriagrammes ?

La nature de la question apprend qu'il y a le même rapport entre 3 myriagrammes et 30 myriagrammes, qu'entre le prix des 3 myriagrammes et le prix des 30 myriagrammes : donc on a la proportion

(*a*) La lettre x est employée ici pour tenir la place du quatrième terme de la proportion qui est inconnu, et qu'il s'agit de déterminer.

$3:30::6{,}3:x$; donc x, ou le dernier terme de la proportion, $=\frac{30\times 6{,}3}{3}=63$ francs.

Troisième Exemple. Quel seroit l'intérêt de 800 fr. à 5 pour $\frac{0}{0}$?

La nature de la question avertit que, plus le capital sera considérable, plus l'intérêt doit l'être aussi; ensorte qu'un capital 8 fois plus grand, doit avoir un intérêt 8 fois plus grand : on a donc la proportion $100^{\text{cap.}}:800^{\text{cap.}}::5^{\text{int.}}:x^{\text{int.}}$; donc $x=\frac{5\times 800}{100}=40$ f.

142. Les exemples que nous venons de donner sont des règles de trois simples, parce qu'il n'y a effectivement que deux rapports simples : de plus, elles sont directes, parce que les deux rapports augmentent en même temps. Voici un exemple d'une règle de trois inverse.

100 hommes bâtissent une maison en deux ans; on demande en combien de temps 200 hommes l'auroient bâtie?

L'état de la question avertit que, plus il y aura d'hommes, moins il faudra de temps pour faire le même ouvrage : donc le rapport du temps diminue quand le rapport des hommes augmente; c'est-à-dire, que l'un est l'inverse de l'autre. Au lieu de dire $100^{\text{h.}}:200^{\text{h.}}::2^{\text{ann.}}:x^{\text{ann.}}$, ce qui seroit faux; renversez le premier rapport, et vous aurez $200:100::2:x$; donc $x=\frac{200}{200}=1^{\text{ann.}}$ comme cela doit être.

Au lieu de renverser le premier rapport, on auroit pu renverser le second, ou mettre le premier en fraction, ayant pour numérateur l'unité, $\frac{1}{100}:\frac{1}{200}::2:x$.

Second exemple. Une personne a besoin de 3 mètres d'étoffe large de $\frac{2}{3}$ mètre, on lui en porte une

large de $\frac{3}{4}$; combien de mètres lui en faudra-t-il de cette dernière pour remplir le même objet?

Il est évident que plus l'étoffe sera large, moins il en faudra; donc le rapport de la largeur est l'inverse de celui de la longueur. En renversant un des deux rapports, ils iront directement : ainsi, au lieu de dire $\frac{2}{3}:\frac{3}{4}::3:x$, on dira $\frac{3}{4}:\frac{2}{3}::3:x$; donc $x=\frac{\frac{2}{3}\times 3}{\frac{3}{4}}=2\frac{2}{3}$ de mètre.

L'état de la question avertit toujours comment sont entr'eux les rapports; et quand ils sont posés convenablement, il n'y a plus de différence entre la règle de trois directe et la règle de trois inverse.

143. La nature de la question proposée est quelquefois si compliquée, que la valeur de l'inconnue dépend de plusieurs rapports, dont les uns augmentent quand les autres diminuent; alors la règle de trois est dite composée : avant de chercher la valeur de l'inconnue, il faut la réduire à une règle de trois simple, en comparant les rapports et les réduisant ainsi à deux.

Exemple. 16 hommes travaillant pendant 6 jours, à 2 heures par jour, ont fait 30 mètres d'ouvrage; on demande combien de jours il faudra à 12 hommes, travaillant 4 heures par jour, pour faire 60 mètres.

On voit qu'il y a ici plusieurs rapports. 1°. Le rapport des mètres aux mètres, $=30:60$; 2°. le rapport des hommes aux hommes, $=16:12$; 3°. le rapport des heures aux heures, $=2:4$; 4°. enfin le rapport des jours aux jours, $=6:x$.

On voit encore que plus il y aura d'hommes, moins il faudra de jours : donc le rapport de $16^{h.}:12^{h.}$ est l'inverse de celui de $6^{j.}$ à $x^{j.}$; plus ils travailleront d'heures par jour, moins il faudra de

jours; donc le rapport $2^{h.} : 4^{h.}$ est encore inverse de celui de $6^{j.} : x^{j.}$; plus il y aura de mètres à faire, plus il faudra de jours; donc le rapport de $30^{m.} : 60^{m.}$ est direct.

J'écrirai donc les deux premiers rapports dans le sens inverse, et le dernier dans le sens direct, comme on le voit dans l'exemple. Je formerai le rapport composé écrit au-dessous de la ligne, et je trouverai $x = 8$ par la proportion établie.

$$12^{h.} : 16^{h.} :: 6^{j.} : x^{j.}$$
$$4^{h.} : 2^{h.}$$
$$30^{m.} : 60^{m.}$$
$$\overline{12.4.30 : 16.2.60 :: 6 : x}$$
$$x = \frac{6 \times 1920}{1440} = 8^{j.}$$

Avant de composer le rapport, il faut avoir soin d'effacer les facteurs communs à l'antécédent et au conséquent du premier rapport (123); il n'en sera que plus simple. Ainsi, dans la question précédente, le rapport composé se réduit au rapport de $3 : 4$, et la proportion qui paroissoit d'abord si compliquée, se réduit à celle-ci, $1 : 4 :: 2 : x = 4 \times 2 = 8$ jours.

La règle de trois composée se réduit donc toujours à une règle de trois simple. La seule attention qu'il faut avoir consiste dans la composition des rapports; mais l'habitude et la pratique en apprendront plus que les préceptes.

Nous ne pouvons pas entrer dans le détail de toutes les applications utiles qu'on peut faire de la règle de trois, à cause du nombre presqu'infini de questions qu'on peut résoudre par son moyen. Nous nous contenterons de citer les principales; elles se résolvent toutes par la règle de trois, et ne diffèrent entr'elles que par leur énoncé.

De la règle de société ou de compagnie.

144. La règle de société est une opération par laquelle

laquelle plusieurs associés ayant mis ensemble des fonds pour un même objet, en partagent le gain ou la perte, proportionnellement à leurs mises. Cette règle a deux cas; le premier, si tous les associés ont fait les fonds dans le même temps; le second, si le temps n'est pas le même.

Premier cas. Puisqu'il doit y avoir le même rapport entre les gains qu'entre les mises, on pourra former autant de proportions qu'il y a d'associés. Supposons trois associés que nous désignerons par A, B, C; on dira donc, la mise de A est au gain de A, comme la mise de B est à son gain, comme la mise de C est à son gain : mais dans une suite de rapports égaux, la somme des antécédens est à la somme des conséquens, comme chaque antécédent est à son conséquent : donc on aura la proportion suivante. Les trois mises, ou le fonds total (somme des antécédens), sont aux trois gains ou au gain total (somme des conséquens), comme la mise de chaque associé est au gain qui doit lui revenir. Il faudra donc additionner les différentes sommes d'argent que les associés ont fournies, pour en faire le premier terme de la proportion; le gain total, ou la perte commune, sera le second; chaque mise particulière sera le troisième, et le gain qui doit revenir à chaque mise, sera le quatrième. Il faudra répéter la règle de trois autant de fois qu'il y a d'associés.

Exemple. Trois négocians A, B, C, ont chargé un vaisseau de 212 tonneaux de vin; A a fourni 1342 fr., B a fourni 1178 fr., et C 630 fr.; toute la cargaison est vendue à raison de 32 fr. le tonneau, on demande le gain de chacun.

Il faut commencer par chercher le prix total de la vente, en multipliant 212 par 32; le produit est 6784: ajoutant ensemble les mises particulières, on a 3150.

Cette somme retranchée de 6784, laisse 3634 pour le gain total : on aura donc les trois proportions,

$$3150 : 3634 :: \begin{cases} 1342 : x = 1548 \text{ fr.}, \; 19 \\ 1178 : y = 1359 \;, \; 01 \\ 630 : z = \;\; 726 \;, \; 80 \end{cases}$$

Preuve....... 3150...... 3634, 0

145. Dans cet exemple, on n'a pas eu égard au rapport du temps, parce qu'étant le même pour chaque mise, il doit influer également sur le gain ou la perte que chacun doit supporter; mais il n'en est pas de même lorsque le temps de chaque mise est différent. La considération de ce rapport constitue le second cas; mais il est aisé de le ramener au premier, en composant convenablement les rapports. Supposons pour exemple trois négocians qui ont fait une société ; le premier a mis 1200 fr., et a laissé son argent dans la société 12 mois; le second a mis 1800 fr., et n'a laissé son argent que 6 mois; le troisième a mis 2400 fr., et a laissé son argent 3 mois; ils ont gagné 600 fr.; on demande quel doit être le gain de chacun, proportionnellement aux mises et au temps?

Pour résoudre cette question, on commencera par composer les rapports, en disant 1200 fr. pendant 12 mois, produiront le même intérêt que $12 \times 1200 = 14400$ fr. pendant un mois. Par la même raison, 1800 fr. dans le commerce, pendant 6 mois, produiront le même intérêt que $6 \times 1800 = 10800$ fr. pendant un mois; et 2400 fr. pendant 3 mois, produiront le même intérêt que $3 \times 2400 = 7200$ fr. pendant un mois. Ayant ainsi réduit le temps à être le même pour chaque mise, le second cas se trouve ramené au premier, et ne présente plus aucune difficulté. On prendra donc la somme des

mises ainsi réduites, on en fera le premier terme de la proportion; le gain total sera le second; chaque mise particulière réduite sera le troisième, et l'on trouvera le quatrième par les règles ordinaires (*a*).

De la Règle d'intérêt et d'escompte.

146. L'intérêt est le profit que tire le créancier du prêt de son argent; il dépend en général des conditions faites avec l'emprunteur. Il y a deux manières d'énoncer l'intérêt: tantôt on dit que l'intérêt est à tant pour cent par an, tantôt qu'il est à tel denier. Suivant la première manière, on entend qu'autant de fois cent est contenu dans la somme totale, autant de fois on retire l'intérêt assigné à 100 fr.

Suivant la seconde expression, il faut entendre que l'intérêt est au capital, dans le même rapport que 1 est au nombre qui marque le denier: ainsi le denier étant 20, l'intérêt est un vingtième du capital.

On réduit la seconde de ces expressions à la première, en divisant le nombre 100 par le nombre qui

---

(*a*) On peut se servir du principe de la règle de société pour la répartition de la contribution foncière; car on peut regarder la somme à répartir comme un gain ou une perte, le revenu de toute la commune comme un fonds total, et le revenu de chaque contribuable, comme la mise de chaque associé; en sorte qu'on dira le revenu de la commune est à la somme à répartir, comme le revenu de chaque contribuable est à son imposition foncière: on répétera cette règle de trois autant de fois qu'il y a de contribuables. L'application de cette règle seroit extrêmement longue pour la répartition dans les grandes communes: mais on peut l'abréger par des considérations particulières, qu'il seroit trop long d'appliquer dans cet ouvrage.

marque le denier. Par exemple, le denier étant 20, l'intérêt sera $\frac{100}{20} = 5$ p. $\frac{0}{0}$.

On distingue deux sortes d'intérêts, le simple, et celui qu'on appelle intérêt redoublé ou composé.

Le premier est celui qui se tire uniformément sur le premier capital, sans pouvoir devenir capital lui-même, ni produire intérêt.

Le second est quand l'intérêt échu passe en nature de capital, et produit lui-même intérêt. Nous ne parlerons ici que de l'intérêt simple.

Dans toutes les questions de l'un et l'autre genre, il y a cinq choses à considérer; 1°. le capital; 2°. le nombre arbitraire, mais qui est ordinairement 100, qui sert de terme de comparaison pour fixer l'intérêt; 3°. le taux de l'intérêt; 4°. le temps que le capital a été gardé; 5°. ce qui revient tant en capital qu'en intérêts au bout du temps supposé.

Exemple. Une personne a prêté 4000 liv. à 5 p. $\frac{0}{0}$ par an : à combien montent les intérêts et le capital au bout de 5 ans 6 mois 18 jours? On commencera par chercher l'intérêt pour un an, et le multipliant par 5 ans 6 mois 18 jours, on aura l'intérêt cherché : on réduira d'abord 5 ans 6 mois 18 jours en décimales (5ans,55); on dira ensuite, il y a le même rapport entre 100 fr. et 4000 fr. qu'entre l'intérêt de 100 liv. et l'intérêt des 4000 fr. Donc 100 : 4000 :: 5 : $x =$ 200 liv. C'est l'intérêt pour un an. En le multipliant par 5,55, on aura 1110 fr. pour l'intérêt de 5 ans 6 mois 18 jours : ajoutant le capital, la somme totale sera 5110 fr.

147. L'escompte est en général la remise que fait le créancier, ou la perte à laquelle il se soumet en faveur du payement anticipé qu'on fait d'une somme avant l'échéance du terme.

On peut encore dire qu'escompter sur une somme,

c'est en séparer les intérêts qui y sont confondus avec le capital.

La règle d'escompte a une grande analogie avec la règle d'intérêt, parce que l'une et l'autre consistent à prendre l'intérêt d'un capital ; d'où il suit que comme on distingue deux sortes d'intérêts, on distinguera aussi deux sortes d'escomptes, le simple et le composé. Nous ne parlerons ici que de l'escompte simple.

Pour bien entendre la règle d'escompte, il faut savoir ce que l'on entend par l'escompte pris en dedans et l'escompte pris en dehors. L'escompte est pris en dedans, lorsqu'il est prélevé sur toute la somme escomptée, en sorte qu'on retient l'escompte de l'escompte ; et il est pris en dehors, lorsqu'on ne retient que l'escompte de la somme qu'on paye. Par exemple, l'escompte en dedans de 100 fr. à 5 p. $\frac{0}{0}$ est 5 fr., et l'escompte en dehors de la même somme et au même taux est 4 fr. 761.

Les banquiers et négocians ont coutume de prendre l'escompte en dedans ; mais de toutes les manières d'escompter, c'est la plus vicieuse et la plus injuste, et l'on ne peut la justifier que par l'usage (*a*).

En suivant les principes de la saine raison, on verra que la somme remboursée doit toujours être telle, que l'état du débiteur ou du créancier, à l'époque de l'échéance, soit le même que si l'escompte n'avoit pas eu lieu ; c'est-à dire que si le

(*a*) Pour sentir le défaut de cette manière d'escompter, supposons une personne devant à un négociant 100 fr. payables dans 20 ans : elle lui propose de le rembourser aujourd'hui, en retenant l'escompte à 5 pour cent. Si l'on prend l'escompte en dedans, il faudra retenir 100 fr. ; donc il le rembourseroit avec rien, ce qui est absurde.

créancier place à intérêt la somme qu'il reçoit, cet intérêt doit être égal à l'escompte qu'il a donné ; et si le débiteur place à intérêt l'escompte qu'il retient, cet intérêt, ajouté à l'escompte, doit égaler l'intérêt même de ce qu'il devoit : or, c'est ce que l'on obtiendra en prenant l'escompte en dehors, comme on le verra dans l'exemple suivant :

Exemple. Déterminer quelle somme il faut donner, pour acquitter 4000 fr. qui ne sont payables que dans un an, en retenant l'escompte à 5 pour $\frac{0}{0}$.

Voici le raisonnement qu'il faut faire dans tous les cas semblables :

Si je devois 105 fr., payables dans un an, il est évident qu'en donnant aujourd'hui 100 fr., le sort du créancier, plaçant cette somme à 5 pour $\frac{0}{0}$, se trouveroit le même au bout de l'année. Je puis donc équitablement acquitter 105 fr. payables en un an, en donnant 100 fr. ; mais si 105 fr. se réduisent à 100 fr., à combien se réduiront 4000 fr. ? J'aurai donc la proportion $105 : 100 :: 4000 : x = \frac{400000}{105}$ $= 3809$ fr. 53 c. En prenant l'escompte en dedans, on auroit trouvé 3800 fr. L'erreur auroit été de 9 fr. 53 c.

De la règle de change, ou règle conjointe.

148. La règle de change est une opération par laquelle on convertit l'expression d'une somme quelconque déterminée, en valeur d'une monnoie étrangère, d'après un rapport connu entre les monnoies.

Si pour faire cette conversion ou ce change, on a besoin de plusieurs rapports intermédiaires, la règle de change est appelée règle conjointe.

Exemple de la première espèce :

Un négociant de Genève reçoit une facture de Lyon de 166 fr. 67 c. Il veut, pour payer cette somme, prendre une lettre de change à Genève,

sur Lyon. Le change entre la France et Genève est de 5 fr. de France pour 3 fr. de Genève. On demande combien il doit débourser à Genève pour avoir une lettre de change de la somme demandée ?

Il est évident que tout le calcul à faire se réduit à la proportion suivante $5:3::166$ fr. $67:x=100$ fr. 01 c. monnoie de Genève.

Exemple de la seconde espèce :

Il est dû à un particulier de Paris 800 creuzades de Portugal. Lisbonne n'ayant pas de change ouvert avec Paris, il fait le change par la voie d'Amsterdam et de Genève. Le rapport du change de Lisbonne à Amsterdam, est de 1 creuzade pour 45 deniers de gros : celui d'Amsterdam à Genève est de 92 deniers pour 3 fr., et celui de Genève à Paris, est de 3 fr. pour 5 fr. Combien vaudront les 800 creusades en argent de France ?

Tout l'art de cette règle consiste à ordonner plusieurs proportions, de manière qu'étant multipliées par ordre, elles donnent une proportion composée, dont l'un des deux rapports se réduise à celui de 1 à 1, et dont l'autre soit le produit de plusieurs rapports simples. On disposera donc la proportion comme il suit :

1 creusade	: 1 denier d'Amst.	::	45 : 1
1 den. d'Amst.	: 1 liv. de Genève	::	3 : 92
1 l. de Genève	: 1 fr. de France	::	5 : 3
1 fr. de France	: 1 creusade	::	800 : x;

lesquelles étant multipliées par ordre, donnent une proportion dont le premier rapport est celui de 1 : 1; le second doit donc être aussi un rapport d'égalité : donc on aura $x=\frac{45.3.5.800}{1.92.3.}$, et en simplifiant,

$$x=\frac{45000}{23}=1956^{f.}, 52.$$

De la règle de fausse position.

149. La règle de fausse position est une opération par laquelle on détermine la valeur d'un nombre, en appliquant les conditions données à un autre nombre supposé, et pris à volonté.

Exemple. Trois négocians $A, B, C,$ conviennent de donner 1000 fr. à eux trois pour une entreprise, de manière que A ne paie que la sixième partie de ce que paiera B, et B les deux tiers de ce que paiera C : on demande ce que chacun doit donner ?

Supposons que A donne 100 fr., B donnera 600 fr. et C donnera 900 fr.; à eux trois ils donneront 1600 fr. La supposition faite est donc fausse; elle va cependant servir à nous faire trouver le véritable nombre; car les trois portions de A, B, C, doivent être entr'elles dans le même rapport que les trois nombres 100, 600, 900 : représentons donc les trois portions par les trois lettres A, B, C, on aura la proportion $100 : A :: 600 : B :: 900 : C$; donc, $1600 : A + B + C :: 100 : A :: 600 : B :: 900 : C$. (137) : or $A + B + C =$ la somme à avancer $=$ 1000 fr.; donc $A = 62$ fr. 50 c., $B = 375$ fr., $C = 562$ fr. 50 c.

150. Il arrive quelquefois qu'une seule supposition ne suffit pas pour déterminer le vrai nombre; il faut en faire deux, et alors la règle est nommée de double fausse position. Ce cas a lieu principalement lorsqu'on a des nombres déterminés, ajoutés ou soustraits avec ceux qui sont en proportion; ces nombres, étant indépendans du rapport, troublent la proportion : mais en prenant la différence du véritable nombre, au nombre supposé, ces nombres disparoîtront, et cette différence sera proportionnelle à l'erreur commise par la première supposition. En faisant une seconde supposition, et la traitant comme la première, on aura la différence

du véritable nombre au second nombre supposé, qui sera, dans le même rapport, avec la seconde erreur ; donc on pourra en faire une proportion.

Exemple. On demande un nombre dont la moitié, le quart, plus 2, fassent 11.

Je suppose que ce nombre soit 8 : la moitié, le quart de 8, plus 2, font 8 ; l'erreur est donc de 3 ; et cette erreur est proportionnelle au véritable nombre diminué du nombre supposé. Je fais une seconde supposition 4 : la moitié, le quart de 4, plus 2, font 5 ; l'erreur est ici de 6, et elle est également proportionnelle à la différence du véritable nombre et du second nombre supposé. En représentant par x, le véritable nombre, on aura la proportion $3:6::x-8:x-4$ ou $6-3:3::4:x-8$ (*a*), ce qui suffit pour déterminer $x=12$.

La plupart des problêmes où l'on emploie la règle de double fausse position se résolvent plus directement par l'analyse algébrique ; nous ne nous y arrêterons pas davantage, et nous renvoyons à la théorie des équations, pour compléter cette partie de l'arithmétique.

De la règle d'alliage.

151. On appelle en général alliage, le mélange d'un certain nombre de choses de différentes valeurs, qui composent un tout d'un égal nombre de parties et d'une valeur moyenne : ainsi la règle d'alliage a deux parties.

Dans la première, on cherche la valeur moyenne et commune de chaque partie du mélange, quand on connoît le nombre des parties, et la valeur particulière de chacune d'elles.

(*a*) On a, $6-3:3::x-4-(x-8):x-8$; or $x-4=x-8+4$; la proportion se change donc en celle-ci, $6-3:3::4:x-8$.

Dans la seconde, on cherche le nombre des parties des choses qui doivent être mélangées ou alliées, quand on connoît le nombre total des parties, et leurs valeurs moyennes.

Le premier de ces problêmes n'est susceptible que d'une solution ; le second est susceptible de plusieurs, lorsqu'il entre plus de deux espèces dans le mélange.

Première partie. Trouver le prix moyen de l'unité du mélange, quand on connoît le nombre et la valeur des choses dont il est composé.

Multipliez le nombre des choses de chaque espèce du mélange, par la valeur de l'unité de chaque espèce : divisez ensuite la somme de ces produits par le nombre total des choses, le quotient sera la valeur moyenne.

Exemple. Un marchand de vin a mêlé ensemble des vins de différens prix ; savoir : 300 bouteilles à 7 décimes la bouteille ; 200 bouteilles à 10 décimes ; 150 bouteilles à 13 décimes ; on demande combien il doit vendre la bouteille du mélange ?

Les différens prix, multipliés par le nombre des mesures de chaque espèce, font 2100, 2000, 1950 décimes. La somme sera 6050 décimes, qui, divisée par 650, nombre de bouteilles, donne 93 centimes à-peu-près, pour le prix moyen du mélange.

Seconde partie. Deux quantités de différentes valeurs étant données, déterminer ce qu'il faut prendre de chacune, pour former une quantité moyenne dont la valeur est donnée.

Comparez le prix de chaque quantité avec le prix moyen ; écrivez leur différence avec le prix moyen dans un ordre inverse, c'est-à-dire la différence du plus haut à côté du plus bas, et celle du plus bas à côté du plus haut. Ces deux différences,

ainsi écrites, marqueront ce qu'il faut prendre de chaque quantité.

Exemple. Un marchand de vin a des vins à 95 centimes la bouteille, et à 50 centimes; il voudroit en composer un mélange qu'il pût vendre 75 centimes la bouteille.

Ecrivez les deux prix, et le moyen comme dans l'exemple ci-joint. Comparez 95 à 75; la différence est 20 qu'il faut écrire à côté de 50. Comparez 50 à 75, la différence est 25 qu'on

$$75\left\{\begin{array}{l}95\ \ldots\ldots\ 25\\ 50\ \ldots\ldots\ 20\end{array}\right.$$

écrit à côté de 95; ce qui marque que sur 25 bouteilles du vin à 95 centimes, il faut 20 bouteilles du vin à 50 centimes; ou, ce qui est la même chose, sur 5 de la première qualité, il en faut 4 de la seconde, pour que la bouteille du mélange puisse être vendue 75 centimes.

En effet, si on mettoit dans le mélange une bouteille de vin à 95 cent., et une bouteille de vin à 50 cent., la première produiroit une augmentation de prix de 20 cent., et la seconde une diminution de 25 cent. Or, pour que l'augmentation et la diminution se compensent mutuellement, il faut prendre un nombre de bouteilles de chaque qualité, qui soit en raison inverse de la différence des prix; donc, il faut en prendre 25 de la première et 20 de la seconde, parce que l'excès 20, répété 25 fois, égalera la diminution 25, répétée 20 fois.

152. Si l'alliage ou mélange étoit composé de trois ou quatre matières différentes, on compareroit leurs prix deux à deux avec le prix moyen, observant de prendre toujours dans la comparaison un prix au-dessus et un prix au dessous du prix moyen.

Exemple. Avec du café à 6 fr., à 10 fr., à 15 fr., à 17 fr. le myriagramme, on veut faire un mélange à 12 fr. le myriagramme; combien faut-

il en prendre de chaque espèce pour la composition du mélange.

Ecrivez les prix comme dans l'exemple ci-à côté : comparez 17 et 6 au prix moyen ; écrivez les différences dans un ordre inverse ; comparez 15 et 10 au prix moyen,

$$12\begin{cases}17 \ldots\ldots 6\\15 \ldots\ldots 2\\10 \ldots\ldots 3\\6 \ldots\ldots 5\end{cases}$$

et écrivez les différences dans un ordre inverse, et vous trouverez que le mélange doit être composé de 6 myriagrammes de la première qualité, de 2 de la seconde, de 3 de la troisième, et de 5 de la quatrième. On sent assez, par ce que nous avons dit dans le premier exemple, que l'augmentation dans le prix, occasionnée par les myriagrammes de la première qualité, est compensée par la diminution produite par ceux de la quatrième. Il en est de même entre la seconde et la troisième qualité.

On pourroit comparer la première qualité à la troisième, et la seconde à la quatrième, ce qui donneroit une solution différente de la même question : et si parmi les différentes qualités, il ne s'en trouvoit qu'une dont le prix fût au-dessous du prix moyen, il est visible qu'il faudroit la comparer successivement plusieurs fois avec le prix moyen, et écrire chaque fois la différence à côté des autres prix.

On peut mettre une condition de plus au problême, qui limitera le nombre des solutions. On peut demander, par exemple, que le nombre total des myriagrammes du mélange soit 800. Dans ce cas, il y auroit une proportion à ajouter ; on prendroit la somme des différences, qui est 16, et on diroit :

$$16 : 800 :: \begin{cases}6 : x = 300\\2 : y = 100\\3 : z = 150\\5 : v = 250\end{cases}$$

ce qui remplit les conditions du problême.

Des progressions arithmétiques.

153. Une progression arithmétique est une suite de termes, tels que le premier est surpassé par le second, de la même quantité que le second est surpassé par le troisième, le troisième par le quatrième, etc. La *raison* est l'excès d'un des termes sur celui qui le précède. Ainsi, dans la progression suivante : 1.3.5.7.9.11.13, etc. la raison est 2. Si les termes vont en augmentant, la suite est nommée progression croissante; et s'ils vont en diminuant, elle est nommée progression décroissante. Une progression décroissante peut être considérée comme croissante : on n'a qu'à la prendre au rebours, et regarder le plus petit terme comme le premier. C'est sous ce point de vue que nous les considérerons.

154. Il suit de la définition des progressions arithmétiques, que chaque terme est égal à celui qui le précède, augmenté ou diminué de la différence commune. Ainsi, quand on connoît deux termes consécutifs d'une progression, on connoît la différence, et par conséquent toute la progression.

La loi d'une série ou suite, est la manière dont ses termes se forment successivement. Ainsi la loi de la progression arithmétique consiste en ce que chaque terme est égal à celui qui le précède immédiatement, augmenté ou diminué de la différence.

Le terme général d'une série ou suite, est l'expression d'un terme quelconque, au moyen du nombre qui marque le rang de ce terme.

Le terme sommatoire, ou simplement la somme, est l'expression générale de la somme de tous les termes de la série.

C'est une recherche intéressante, et souvent

difficile, de trouver le terme général et le terme sommatoire d'une série.

155. Dans les progressions arithmétiques, le terme général est égal au premier terme de la progression, augmenté de la différence multipliée par le nombre qui indique le nombre des termes qui sont avant celui qu'on cherche.

Car chaque terme est égal à celui qui le précède, augmenté de la différence : donc le second est égal au premier, plus une fois la différence ; le troisième est égal au premier, plus deux fois la différence... ; et le dernier est égal au premier, plus la différence multipliée par le nombre des termes qui sont avant lui.

Exemple. On demande le centième terme d'une progression arithmétique, dont le premier terme est 5, et le second 8 ; le dernier sera $5+3\times 99=302$.

156. Dans une progression arithmétique, la somme des extrêmes est égale à celle de deux termes également éloignés des extrêmes. Supposons une progression arithmétique composée de 20 termes ; la somme des extrêmes sera égale à deux fois le premier terme, plus dix-neuf fois la différence ; le second contiendra le premier, plus une fois la différence ; et l'avant-dernier contiendra le premier, plus dix-huit fois la différence : donc la somme des deux égalera celle des extrêmes ; le troisième contiendra la différence une fois de plus que le second, et l'antépénultième la contiendra une fois de moins que l'avant-dernier : donc la somme sera encore la même. Le même raisonnement appliqué à tous les termes, pris deux à deux dans l'ordre indiqué, feroit voir que les sommes seroient égales à celle des extrêmes.

On peut se convaincre de cette vérité, en écrivant les uns sous les autres les termes de la même pro-

gression pris dans un ordre renversé, et, les ajoutant ainsi deux à deux, les sommes seront toutes égales entr'elles, comme on le voit dans l'exemple suivant :

$$\begin{array}{cccccccc} 1. & 3. & 5. & 7. & 9. & 11. & 13. & 15 \\ 15. & 13. & 11. & 9. & 7. & 5. & 3. & 1 \\ \hline 16. & 16. & 16. & 16. & 16. & 16. & 16. & 16 \end{array}$$

donc le premier terme et le dernier, le second et l'avant-dernier, formeront une proportion arithmétique; et généralement deux termes pris indistinctement dans une progression arithmétique, et deux autres termes pris dans la même progression, et séparés par un même nombre de termes que les deux premiers, formeront nécessairement une proportion arithmétique.

Si le nombre des termes de la progression est impair, la somme des extrêmes sera égale au double du terme également éloigné des deux extrêmes.

157. Dans une progression arithmétique, le *terme sommatoire*, ou la somme de tous les termes est égale à la somme des extrêmes, multipliée par la moitié du nombre des termes.

Car si nous réunissons les termes deux à deux, le premier avec le dernier, le second avec l'avant-dernier, et ainsi des autres, la somme totale sera égale à la collection des sommes partielles. Or, ces sommes sont toutes égales; donc la somme totale sera égale à une seule répétée autant de fois qu'il y a de ces sommes partielles : mais le nombre en est égal à la moitié du nombre des termes; donc le terme sommatoire est égal à la somme des extrêmes multipliée par la moitié du nombre des termes.

Exemple. On demande la somme de tous les termes de la progression 1.3.5.7.9.11....199, composée de cent termes?

La somme totale est $(1+199)\times 50 = 10000$.

Dans toute progression arithmétique, on peut distinguer cinq principaux élémens; savoir, le premier terme, le dernier, la différence, le nombre des termes, et la somme de tous.

La formule qui nous donne le terme général, celle qui donne le terme sommatoire, suffisent pour nous faire connoître deux de ces élémens, si nous connoissons les trois autres : mais nous ne pourrions entrer dans ce détail sans le secours de l'algèbre. Nous nous bornerons à chercher la différence, connoissant le premier terme, le dernier, et le nombre de tous les termes.

158. La différence commune de la progression arithmétique, est égale à la différence du premier et du dernier terme, divisée par le nombre de tous les termes, diminué d'une unité.

Car le dernier terme est égal au premier, plus à la différence multipliée par le nombre des termes moins un : donc si nous retranchons le premier du dernier, ce qui restera sera l'expression de la différence multipliée par le nombre des termes de la progression diminué d'une unité; donc si on divise ce reste par le nombre des termes moins un, le quotient donnera la différence que nous cherchons.

Exemple. On demande la différence ou la raison d'une progression composée de neuf termes, dont le premier est 1, et le dernier 25.

Cette différence est égale à $\frac{25-1}{8} = 3$.

Donc les termes de la progression seront....... 1.4.7.10.13.16.19.22.25.

On se sert de cette loi pour insérer entre deux nombres donnés autant de moyens proportionnels qu'on veut : car pour cela il suffit de connoître la

la différence qui doit régner d'un terme à l'autre.

Exemple. On propose d'insérer huit moyens proportionnels arithmétiques entre 3 et 57.

Le nombre de tous les termes de la progression sera donc de dix; donc la différence commune sera $\frac{57-3}{9}=6$, et la progression demandée sera 3.9.15.21.27.33.39.45.51.57 (*a*).

Des progressions géométriques.

159. Une progression géométrique est une suite de termes tels, que le premier est contenu dans le second, comme le second est contenu dans le troisième, comme le troisième est contenu dans le quatrième.... &c.

La raison de la progression est le nombre de fois qu'un terme contient celui qui le précède; c'est le quotient du conséquent divisé par l'antécédent. Ainsi, dans la progression suivante, 1:2:4:8:16:32:64: ... &c. la raison est 2.

Si les termes vont en augmentant, la progression est croissante, et s'ils vont en diminuant, elle est décroissante.

Lorsque la progression est décroissante, on peut la regarder comme croissante, en la prenant au rebours, et considérant le plus petit terme comme le premier.

Une progression géométrique peut être composée

(*a*) La manière d'insérer entre deux nombres autant de moyens proportionnels qu'on voudra, est une des bases de la théorie élémentaire des logarithmes, c'est ce qui nous a engagés de l'insérer ici, en renvoyant à l'algèbre la solution des autres questions qui se présentent dans la théorie des progressions arithmétiques.

d'un nombre illimité de termes; si elle est croissante, on dit que son dernier terme est infini; et, si elle est décroissante, son dernier terme est dit infiniment petit ou zéro (*a*).

Il suit de la définition des progressions géométriques, que chaque terme est égal à celui qui le précède multiplié par la raison : ainsi, quand on connoît les deux premiers termes d'une progression géométrique, on connoît la raison, et par conséquent tous les termes de la progression.

Si le premier terme de la progression géométrique est l'unité, le quotient ou la raison sera égal au second terme, et par conséquent les termes de la progression seront les puissances successives du second terme ou du quotient, comme on le voit dans la progression suivante :....................
1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : 2187.... &c.

Si, au lieu d'écrire les puissances, on veut se contenter de les indiquer par des exposans, on aura...
$3^0 : 3^1 : 3^2 : 3^3 : 3^4 : 3^5 : 3^6 : 3^7 : 3^8$.... &c.

On remarquera facilement que, lorsque les puissances forment une progression géométrique, les exposans qui les désignent forment une progression arithmétique.

Les deux questions principales qu'on peut se pro-

(*a*) Le dernier terme d'une progression géométrique croissante ne peut jamais être infini, parce que, quelque grand qu'on le suppose, il sera toujours possible d'en concevoir un plus grand. Par la même raison, une progression décroissante ne pourra jamais finir par zéro, parce que quelque petit que soit le dernier terme, il sera une fraction du précédent. Les mots d'*infini* et *zéro* ne sont employés ici que pour désigner les limites des progressions; c'est-à-dire que plus on prendra de termes dans les deux progressions, plus la première approchera de l'infini, et la seconde de zéro, sans cependant pouvoir jamais atteindre ces limites.

poser dans les progressions géométriques, sont de chercher le terme général et le terme sommatoire.

160. Dans la progression géométrique, le terme général est égal au premier terme de la progression, multiplié par la raison, élevée à une puissance marquée par le nombre des termes de la progression, diminué d'une unité.

Car chaque terme est égal à celui qui le précède multiplié par la raison : donc le second est égal au premier multiplié par la raison ; le troisième est égal au premier multiplié par deux fois la raison ; et le dernier sera égal au premier, multiplié par autant de fois la raison, qu'il y a de termes avant lui : donc il est égal au premier multiplié par la raison, élevée à une puissance marquée par le nombre des termes, diminué d'une unité.

Exemple. On demande le vingtième terme de la progression géométrique, dont le premier est 1, le second 2, le troisième 4, &c. le dernier sera $= 1 \times 2^{19} = 524288$.

161. Dans toute progression géométrique, le produit des extrêmes est égal au produit de deux termes également éloignés des extrêmes.

Supposons une progression composée de vingt termes ; le produit des extrêmes sera égal au produit du quarré du premier terme multiplié par 19 fois la raison ; le second terme contiendra une fois le premier, multiplié par une fois la raison ; et l'avant-dernier sera égal au premier, multiplié par 18 fois la raison : donc le produit des deux égalera celui des extrêmes. Il en sera de même du troisième et de l'antépénultième.... &c. : donc.. &c.

Donc le premier terme, le second, l'avant-dernier et le dernier, formeront une proportion géométrique ; et généralement deux termes pris indistinc-

tement dans une même progression géométrique, et deux autres termes pris dans la même progression, et séparés l'un de l'autre d'un intervalle égal à celui qui sépare les deux premiers, formeront une progression géométrique.

162. Dans toute progression géométrique, le produit de tous les termes est égal au produit des extrêmes, élevé à une puissance marquée par la moitié du nombre des termes.

Car, si on multiplie les termes de la progression deux à deux, le premier avec le dernier, le second avec l'avant-dernier, et ainsi des autres, on formera des produits égaux en nombre égal à la moitié du nombre des termes; si on multiplie tous ces produits entr'eux, le produit total sera le produit de tous les termes de la progression : mais puisqu'ils sont tous égaux au produit des extrêmes, il s'ensuit que le produit total sera égal au produit des extrêmes, élevé à une puissance marquée par la moitié du nombre des termes.

Exemple. Dans la progression 1.2.4.8.16.32, le produit de tous les termes est $(1\times32)^3=32768$.

163. Dans toute progression géométrique, la somme de tous les termes est égale au dernier terme multiplié par la raison de la progression, ce produit étant diminué de la valeur du premier terme, et divisé ensuite par la raison diminuée d'une unité.

Pour mieux entendre la démonstration, prenons pour exemple la progression 3:9:27:81:243:729. En représentant par S la somme de tous les termes, nous aurons cette égalité $S=3+9+27+81+243+729$: si on multiplie toute l'égalité par la raison 3, on aura $3S=9+27+81+243+729+2187$; si on retranche la première de la seconde, il restera $2S=2187-3$, ou $3\times729-3$; si on divise tout

par 2, on aura $S = \frac{3 \times 729 - 3}{2}$. L'on voit par ce résultat, que la somme de tous les termes représentés par S est égale au dernier terme 729 multiplié par 3 qui est la raison, en retranchant de ce produit le premier terme 3 de la progression, et divisant le tout par la raison diminuée d'une unité. Si la raison de la progression eût été 4, on eût multiplié le dernier terme par 4, et on eût divisé par 3.

Exemple. On demande la somme de tous les termes de la progression 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256.

La somme totale est $\frac{256 \times 2 - 1}{2 - 1} = 511$.

Si la progression étoit décroissante, la manière de trouver la somme seroit la même, en regardant le plus petit terme comme le dernier, et le plus grand comme le premier.

Exemple. On demande la somme de tous les termes de la progression suivante, continuée à l'infini, $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} : \frac{1}{32} : \frac{1}{64} : \frac{1}{128} : \frac{1}{256}$........&c.

Puisque cette progression est continuée à l'infini, ses termes approchent continuellement de la limite : on peut donc prendre pour dernier terme la limite même, c'est-à-dire zéro; la raison de la progression est 2, le plus grand terme $\frac{1}{2}$, et le plus petit o; donc la somme $= \frac{2 \times \frac{1}{2} - 0}{2 - 1} = 1$.

A proprement parler, la somme de cette progression ne sera jamais $= 1$, parce qu'on ne pourra jamais épuiser le nombre de termes qui vont à l'infini; mais plus on prendra des termes dans la progression, plus leur somme approchera de l'unité : ainsi l'unité est la limite de la somme des termes de cette progression; c'est-à-dire que l'unité est le nombre duquel cette somme approche de plus en plus,

sans pouvoir jamais l'égaler, mais dont elle peut approcher aussi près qu'on voudra.

164. Dans toute progression géométrique, on peut distinguer cinq principaux élémens; savoir, le premier terme, le dernier, le quotient ou la raison, le nombre des termes, et la somme de tous. La formule qui donne le terme général, combinée avec celle qui donne le terme sommatoire, suffiroit pour faire connoître deux de ces élémens, si on connoissoit les trois autres. Mais ici les calculs seroient encore plus compliqués que dans les progressions arithmétiques. Nous sommes donc forcés de renvoyer à l'algèbre les détails et les applications de ces formules.

Nous ferons ici la même remarque que sur les progressions arithmétiques; savoir, que pour insérer un nombre donné de moyens proportionnels géométriques, entre deux nombres donnés, il suffit de trouver la raison ou le quotient. Ce moyen, et celui que nous avons indiqué pour les progressions arithmétiques, sont les deux bases du calcul élémentaire des logarithmes.

La théorie des progressions géométriques est une des plus utiles dans les élémens de mathématiques, parce que beaucoup de questions intéressantes en dépendent. Par exemple, les problêmes sur les annuités, sur l'intérêt composé, l'escompte, l'établissement des rentes viagères, et beaucoup d'autres semblables. Si on suppose qu'une somme donnée d'argent produise au bout d'un certain temps, une certaine somme; au bout d'un temps double, la même somme aura produit encore une pareille somme, et de plus, la somme produite dans le premier temps aura produit proportionnellement une autre somme pendant le second espace de temps, et ainsi de suite. Si l'intérêt est à 5 pour $\frac{0}{0}$, ou au denier 20, le capital sera augmenté au bout d'un

an d'un vingtième, c'est-à-dire, qu'il se trouvera augmenté dans le rapport de 21 : 20 ; au bout de deux ans, il se trouvera encore augmenté dans le même rapport ; il sera donc égal au premier capital multiplié deux fois par $\frac{21}{20}$ ou $(\frac{21}{20})^2$: à la fin de la troisième année, il sera augmenté dans le même rapport ; il sera donc multiplié par $(\frac{21}{20})^3$, et, au bout de 15 ans, il sera multiplié par $(\frac{21}{20})^{15}$. Or, il est aisé de remarquer que tous ces termes forment une progression géométrique, dans laquelle la raison est $\frac{21}{20}$: donc pour trouver ce que deviendra une somme d'argent, placée à intérêt composé pendant 15 ans, il faut chercher le quinzième terme d'une progression géométrique, dont le premier terme est 1, et la raison $\frac{20}{21}$, et multiplier la somme placée, par ce quinzième terme.

Réciproquement, pour trouver la valeur présente d'une somme payable au bout d'un certain temps, il faudra diviser la somme proposée autant de fois par la fraction $\frac{21}{20}$, qu'il y a d'années à courir. En effet, puisque 20 fr. payables aujourd'hui, valent 21 fr. payables dans un an, réciproquement, 21 fr. payables dans un an, ne valent que 20 fr. payables aujourd'hui. Ainsi, pour trouver combien un capital payable seulement au bout d'un certain temps, vaudroit une année plutôt, il faudra le multiplier par $\frac{20}{21}$: pour trouver sa valeur deux années avant l'échéance, on le multipliera par $(\frac{20}{21})^2$, et en général, sa valeur réelle un certain nombre d'années déterminé avant l'échéance, sera exprimée par le même capital, multiplié par la fraction $\frac{20}{21}$, élevée à une puissance désignée par le nombre des années. C'est ainsi que devroit s'effectuer la règle d'escompte composée(*a*).

(*a*) On ne connoît dans le commerce qu'une espèce d'escompte, c'est celle de l'intérêt simple ; encore même, dans

165. En examinant avec attention les divers résultats que nous ont fourni les rapports, les proportions et les progressions, on observe entr'eux une analogie remarquable. Tout ce qui, dans les rapports, les proportions, les progressions arithmétiques, est exprimé en sommes, ou différences, se trouve exprimé en produits ou quotients, dans les rapports, proportions ou progressions géométriques; tout ce qui, dans les progressions arithmétiques, se rapporte aux produits et aux quotients, se rapporte aux puissances et aux racines dans les progressions géométriques.

Cette analogie a conduit Neper à la découverte des logarithmes. Cette invention est sans contredit une des plus intéressantes qu'on ait faite dans la science des nombres, puisqu'en abrégeant les opérations de l'arithmétique, elle facilite l'application du calcul à des objets réels, et étend ainsi la sphère de toutes les sciences.

Des Logarithmes.

166. Si l'on conçoit que l'on écrive l'une au-dessus de l'autre, deux progressions; la première géomé-

---

beaucoup de pays, prend-on l'escompte *en dedans;* ce qui est de toutes les manières d'escompter la plus vicieuse et la plus injuste. Il est vrai que c'est celle dont le calcul est le plus facile, et comme on n'escompte ordinairement qu'à court terme, c'est-à-dire pour quinze jours, un ou deux mois, &c. la différence pour petite somme est de peu de valeur; mais lorsque cette différence se renouvelle souvent dans l'espace d'une année, comme chez les banquiers, elle devient considérable à leur avantage. La manière la plus équitable d'escompter seroit l'escompte composé, il seroit moins avantageux au créancier que l'escompte simple, si le terme étoit moindre d'un an; c'est le contraire, si on escompte pour plus d'un an.

trique, et commençant par l'unité, la seconde arithmétique, et commençant par zéro ; chaque terme de la progression arithmétique, est dit le logarithme du terme correspondant de la progression géométrique. Par exemple, si l'on écrit les deux progressions suivantes :

1.2.4.8.16.32.64.128.
0.1.2.3. 4. 5. 6. 7.

0 sera le logarithme de 1 ; 1 sera le logarithme de 2 ; 2 sera le logarithme de 4 ; 3 sera le logarithme de 8, et ainsi de suite ; en sorte que si on prend dans la progression géométrique quatre termes qui soient en proportion géométrique, leurs logarithmes seront en proportion arithmétique.

167. De la définition que nous venons de donner des logarithmes, et des propriétés démontrées des progressions arithmétiques et géométriques, nous pouvons conclure les propositions suivantes :

1°. Le logarithme du produit de deux nombres quelconques, pris dans la progression géométrique, est égal à la somme des logarithmes des deux facteurs.

Car dans toute multiplication, on a cette proportion géométrique ; le produit est au multiplicande, comme le multiplicateur est à l'unité (31) ; donc, les logarithmes du produit, du multiplicande, du multiplicateur et de l'unité, formeront une proportion arithmétique. Mais on sait que dans toute proportion arithmétique, la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens ; donc le logarithme du produit, plus le logarithme de 1, sera égal au logarithme du multiplicande, plus le logarithme du multiplicateur ; mais le logarithme de 1 est 0 ;

donc le log. du produit égalera le log. du multiplicateur, plus celui du multiplicande (*a*).

Exemple. $8\times4=32$. Or, le log. de 8, pris dans la progression arithmétique que nous avons citée, est 3 ; le logarithme de 4 est 2, et $3+2=5$ logarithme de 32.

2°. Le logarithme du quotient de deux nombres quelconques, pris dans la progression géométrique, et divisé l'un par l'autre, est égal à la différence qu'il y a entre le logarithme du dividende et celui du diviseur.

Car dans toute division on a cette proportion géométrique ; le diviseur est au dividende, comme l'unité est au quotient (39). Donc les logarithmes formeront la proportion arithmétique suivante ; le log. du diviseur est au log. du dividende, comme le log. de l'unité est au log. du quotient.... ; d'où on tire le log. du quotient = le log. du dividende ; plus le log. de l'unité, moins le log. du diviseur.

Exemple. 64 divisé par $4=16$. Or, le log. de 16, qui est 4, est = à celui de 64, qui est 6, moins celui de 4, qui est 2, ou $4=6-2$.

3°. Le log. d'un quarré est égal à deux fois le log. de la racine ; car dans un quarré le multiplicande et le multiplicateur sont égaux : donc le log. du produit sera égal à deux fois celui du multiplicande.

(*a*) C'est pour simplifier les calculs le plus qu'il a été possible, que dans la formation des logarithmes on a fait répondre le zéro de la progression arithmétique à l'unité de la progression géométrique. Sans cette précaution, pour avoir un produit, il eût fallu ajouter les logarithmes du multiplicande et du multiplicateur, et en retrancher ensuite celui de l'unité; c'eût été une soustraction continuelle à faire dans les multiplications, et une addition dans les divisions ; et c'est pour s'éviter la peine de faire ces deux règles, que dans tous les systêmes de logarithmes on a fait le logarithme de l'unité égal à zéro.

Par la même raison, le log. du cube, de la quatrième puissance, &c. sera égal à trois fois, quatre fois, &c. le log. de la racine. Ainsi, le log. de $16 = 2 \times$ log. de 4, le log. de $125 = 3 \times$ log. de 5.

4°. Le logarithme d'une racine quarrée est égal à la moitié du logarithme de la puissance; car de ce que le log. de $16 = 2$ fois le log. de 4, il s'ensuit que le log. de $4 = \frac{\text{log. de } 16}{2}$.

Par la même raison, le log. de la racine cubique de 125, égale $\frac{\text{log. de } 125}{3}$.

168. On voit, par ce que nous venons de dire, que les logarithmes nous présentent le moyen de faire, par l'addition et la soustraction, les opérations que l'on seroit obligé d'exécuter, sans leur secours, par la multiplication et la division. Ils réduisent les exaltations aux puissances et les extractions de racines à de simples multiplications et divisions. Veut-on multiplier, par exemple, 4 par 16, on prendra le log. de 4, et on l'ajoutera au log. de 16, et leur somme donnera le log. de 64. S'il s'agissoit de diviser 128 par 8, on chercheroit le log. de 128, on en retrancheroit celui de 8, et le reste seroit le log. du quotient ou de 16.

Si on cherche le quarré de 8, on prendra le log. de 8, on le multipliera par 2, ce qui donnera le log. de 64.

Enfin, si on vouloit avoir la racine quarrée de 256, on prendroit le log. de 256, et on le diviseroit par 2, le quotient indiqueroit le log. de 16.

169. Le rapport que nous venons d'établir entre les deux progressions arithmétique et géométrique, est fondé sur la nature même de ces progressions, et seroit égalementvrai, quelles que fussent les deux

progressions, ce qui donne une infinité de systêmes de logarithmes ; mais le plus commode, et celui qui est le plus en usage, est celui dans lequel, à la progression arithmétique des nombres naturels, o, 1.2.3.4.5.6.7.8.&c., répond la progression décimale 1, 10, 100, 1000, 10000, &c. Dans ce systême, o est le log. de 1 ; 1 est le log. de 10 ; 2 est celui de 100 ; 3 est celui de 1000, 4 celui de 10000, &c.

Ce systême de logarithmes ne peut être utile pour faciliter les calculs arithmétiques, qu'autant que l'on a les logarithmes des nombres intermédiaires entre 1 et 10, entre 10 et 100, entre 100 et 1000, &c. Il faut donc faire en sorte que la progression géométrique dont il s'agit, renferme tous les nombres naturels 1, 2, 3, 4. Ce que l'on obtiendra en insérant entre 1 et 10, entre 10 et 100, un très-grand nombre de moyens proportionnels géométriques, et entre o et 1, entre 1 et 2, &c. un égal nombre de moyens proportionnels arithmétiques ; ayant ainsi inséré un égal nombre de moyens proportionnels dans les deux progressions, chaque terme de la progression arithmétique sera logarithme de son correspondant dans la progression géométrique.

Problême premier. Insérer 999999 moyens proportionnels arithmétiques entre o et 1 (158).

Solution. La différence qui doit régner d'un terme à l'autre dans cette progression, est 0,0000001 ; donc, le premier terme étant o, le second sera 0,0000001, le troisième 0,0000002, &c.

Problême second. Insérer un égal nombre de moyens proportionnels géométriques, entre 1 et 10 (164).

Solution. Pour insérer un certain nombre de moyens géométriques entre deux nombres donnés,

il suffit de connoître le quotient. Or, lorsque le premier terme est 1, le quotient est égal au second terme de la progression. La manière de le trouver dépend de l'extraction des racines plus élevées que le second degré, dont nous n'avons pas encore parlé. Nous le supposerons connu, et égal à 1,0000002302 ; donc chaque terme sera égal à celui qui le précède, multiplié par ce quotient : et le dernier terme, c'est-à-dire 10, sera égal à ce même quotient, élevé à la dix-millionnième puissance.

170. A la vérité, les nombres naturels 1.2.3.4 n'entrent pas rigoureusement dans cette progression ; c'est-à-dire que parmi les 10 millions de termes qui précèdent 10, il n'y en a aucun qui soit rigoureusement 2, 3, 4. Mais ces termes croissent si lentement, qu'il s'en trouvera nécessairement quelqu'un qui ne différera que d'une quantité insensible des nombres naturels, et pourra, dans l'usage ordinaire, lui être substitué. C'est ainsi, par exemple, que si on cherche le logarithme de 9, on ne trouvera pas dans les moyens proportionnels géométriques un nombre qui soit rigoureusement 9; mais on en trouvera un, qui est 9,0000001, lequel n'étant éloigné de 9 que d'une dix-millionnième partie de l'unité, son logarithme, c'est-à-dire le terme correspondant de la progression arithmétique, peut être pris sans erreur sensible pour celui de 9. Ce terme seroit le 9542425ème terme de la progression géométrique, et son logarithme seroit par conséquent 0,9542425.

171. C'est par une semblable méthode, et par des calculs immenses, que Neper détermina le logarithme de plusieurs nombres. Il trouva, par exemple, que le logarithme du nombre 2 étoit,

à la huitième décimale près, le 6931472ème terme de la progression géométrique qu'il avoit choisie (*a*).

De sorte que le log. de 2 étoit, dans le système de Neper, 0,6931472. Le nombre 10 se trouve, dans le même système, le 23025858ème terme de la progression géométrique, et son log. est par conséquent 2,3025858.

172. Cette méthode d'insérer un si grand nombre de moyens proportionnels entre deux nombres donnés, pour trouver les logarithmes des nombres naturels, est pénible et rebutante. Aussi les premiers calculateurs de tables, Briggs et Wlacq, employèrent-ils différens moyens très-ingénieux pour faciliter leur travail (*b*). Ils remarquèrent d'abord

---

(*a*) Si on prenoit pour raison de la progression géométrique, l'unité plus la différence même de la progression arithmétique, savoir 1,0000001, on auroit une progression géométrique dont le premier terme séroit 1, le second 1,0000001, et le dix millions et unième seroit 2,118287. C'est sur cette progression géométrique que tomba Neper, et d'après laquelle il calcula les premiers logarithmes qu'on nomme logarithmes naturels, ou logarithmes hyperboliques : on trouvera la raison de cette dénomination dans l'algèbre.

Si l'on eût choisi une progression géométrique dont le quotient ou la raison fût 1,000000693.... le dernier terme eût été 2, et son log. eût été 1 ; celui de 4 eût été 2, celui de 8 eût été 3, &c.

(*b*) Un des moyens employés par *Briggs* pour calculer les logarithmes des nombres premiers, consistoit à extraire un grand nombre de fois de suite la racine quarrée du nombre dont il cherchoit le logarithme. La dernière racine, ainsi diminuée par ces opérations successives, ne pouvoit qu'être très-petite, et devenir égale à l'unité, plus un certain nombre de décimales : il ne conservoit que les décimales de cette opération, faisoit ensuite les mêmes opérations sur le nombre 10, et divisoit le premier résultat par le second.

que pour construire des tables depuis 1 jusqu'à 100000, il suffisoit d'avoir les logarithmes des nombres premiers; car pour ceux qui sont les produits de deux ou de plusieurs nombres, leurs logarithmes se trouvent, en prenant simplement la somme des logarithmes de leurs facteurs (167). Ainsi quand on connoît les logarithmes de 2 et de 3, on a celui de 6, avec celui de 6 et de 2, on a celui de 12; celui de 6 et de 3 donnent celui de 18; celui de 18, moins celui de 2 donne celui de 9, et ainsi des autres. Toute la difficulté est donc réduite à chercher les logarithmes des nombres premiers. Le moyen qui se présente naturellement, et qui est encore un des plus simples, consiste, 1°. à prendre la progression géométrique des nombres 1 : 10 : 100 : 1000... dont les logarithmes sont 0, 1, 2, 3... 2°. A intercaler entre les termes successifs des deux séries autant de termes correspondans qu'on voudra; dans la première, par des moyens proportionnels géométriques, et dans la seconde, par des moyens proportionnels arithmétiques : de cette manière, quand on sera parvenu à un terme de la première série qui approchera jusqu'à la huitième décimale du nombre dont on veut avoir le logarithme, le terme correspondant de l'autre sera, à la huitième décimale près, le logarithme de ce nombre.

Exemple. Soit proposé de trouver le logarithme de 5.

Comme 5 tombe entre 1 et 10, on cherche d'abord par l'extraction de la racine quarrée de 10 le moyen proportionnel géométrique entre 1 et 10; on trouve 3,1622766, et le moyen arithmétique correspondant entre 0 et 1 sera 0,5000000. Ainsi, on est assuré que le dernier nombre est le logarithme du premier. Puisque 5 est entre le nombre qu'on vient de trouver, et 10, on cherchera de même le

moyen proportionnel géométrique entre ces deux nombres, on trouve 5,623413. Ainsi en prenant le moyen proportionnel arithmétique entre 1 et 0,500000, on aura 0,750000 pour logarithme de ce nombre. Maintenant 5 se trouve entre ce dernier nombre et le précédent, il faudra, pour en approcher toujours, chercher le moyen proportionnel géométrique entre les deux derniers, et le moyen proportionnel arithmétique entre leurs logarithmes, et ainsi de suite. On trouvera, après vingt-deux opérations, que le logarithme de 5 est 0,6989700. Celui de 2 ne coûte pas moins de peine, et tous ceux des nombres premiers exigent le même travail.

173. L'idée primitive des logarithmes est donc celle de deux progressions correspondantes, l'une arithmétique, et l'autre géométrique; et toute la théorie des logarithmes consiste à faire en sorte que tous les nombres naturels fassent partie d'une même progression géométrique; ce que l'on obtient, 1°. en prenant une progression géométrique qui commence par 1, et dont le quotient ne diffère de l'unité que d'une quantité très-petite. 2°. En prenant une progression arithmétique commençant par zéro, et dont la différence soit très- petite.

174. On a construit des tables qui renferment dans une même colonne verticale tous les nombres entiers depuis 1 jusqu'à 100000, faisant tous partie de la progression géométrique; et vis-à-vis des premiers, dans une autre colonne verticale, on a mis les termes correspondans de la progression arithmétique commençant par zéro. Ces derniers termes sont les logarithmes des premiers, et les tables ainsi construites, sont ce qu'on appelle *tables des logarithmes.*

Dans les tables ordinaires, le log. de 1 est 0, et celui de 10 est 1. Donc tous les nombres qui sont

entre

entre 1 et 10, ont pour logarithmes des nombres plus grands que 0, et plus petits que l'unité.

Le logarithme de 10 est 1, et celui de 100 est 2; donc tous les nombres entre 10 et 100 ont des logarithmes plus grands que 1, et plus petits que 2.

Le log. de 100 étant 2, celui de 1000 est 3; donc tous les nombres entre 100 et 1000 ont pour logarithmes des nombres plus grands que 2, et plus petits que 3, et ainsi des autres.

Les logarithmes de presque tous les nombres sont donc composés d'entiers et de décimales. L'entier qui précède les décimales se nomme *la caractéristique*, parce qu'il marque, en l'augmentant de l'unité, combien de chiffres doit avoir le nombre auquel le logarithme correspond. Ainsi 0 placé avant la virgule dans le logarithme, signifie que le nombre correspondant ne doit avoir qu'un seul chiffre; 1 placé avant la virgule dans le logarithme, signifie que le nombre correspondant doit avoir deux chiffres, c'est-à-dire qu'il est entre 10 et 100, et ainsi des autres (*a*).

(*a*) On trouve dans presque toutes les tables de logarithmes une difficulté qu'il est bon d'expliquer; c'est que dans la première ligne des tables, on a donné pour logarithme à zéro, l'infini négatif. Or zéro n'étant pas une quantité, ne devroit pas avoir de logarithme. La réponse qu'on peut faire à cette difficulté se tire de l'inspection seule des deux progressions arithmétique et géométrique, qui sont les bases des logarithmes. La progression géométrique décimale continuée au-dessous de l'unité, donnera $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000} \ldots$ La progression arithmétique continuée au-dessous de 0 donnera $-1, -2, -3 \ldots$ Il est clair que ces deux progressions continuées à l'infini donneront, la première un terme infiniment petit, que l'on prend pour zéro, et la seconde, l'infini avec le signe négatif, et qui sera le logarithme correspondant au terme infiniment petit de la première progression.

Quant aux logarithmes des fractions, on ne les trouvera pas dans les tables; mais il sera facile de former sur-le-champ, au moyen des tables, le logarithme de telle fraction qu'on voudra, en prenant le logarithme du numérateur, et en retranchant celui du dénominateur; d'où il suit que lorsque le dénominateur sera plus grand que le numérateur, ce qui arrive toujours dans les fractions, le logarithme sera négatif.

175. On peut encore se former une idée très-simple des logarithmes, en les considérant comme les exposans des différentes puissances du même nombre.

Supposons, par exemple, qu'on écrive la progression géométrique décimale de la manière suivante;

$$10^0 . 10^1 . 10^2 . 10^3 . 10^4 . 10^5 ....$$

qui est la même chose que

$$1 . 10 . 100 . 1000 . 10000 . 100000 ....$$

Mais les notions d'infini et d'infiniment petit doivent être appuyées sur des principes plus lumineux.

Le zéro par lequel la progression géométrique $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100} ...$ se termine, ne doit point être considéré comme une quantité réelle, mais comme une limite vers laquelle les termes de cette progression tendent sans cesse, et dont ils approchent d'autant plus qu'ils sont plus éloignés. En sorte que l'on peut continuer la progression, de manière que son dernier terme soit moindre qu'aucune grandeur donnée : c'est ce qu'on veut exprimer, en disant que le dernier terme de la progression continuée à l'infini est o.

Pareillement dans la progression arithmétique $0, -1, -2, -3 ...$ plus on prendra de termes, plus le dernier terme sera grand, en sorte qu'il n'aura d'autre limite que l'infini. Ainsi quand on dit que le logarithme de o est l'infini négatif, cela signifie que plus une fraction est petite, plus son logarithme négatif est grand, et que l'on peut prendre la fraction si petite, que son logarithme surpasse tout nombre donné. Le zéro est la limite de la fraction, et l'infini négatif est la limite de son logarithme.

Il est évident que les exposans o, 1, 2, 3, 4, 5, 6 sont les logarithmes des nombres inférieurs ; et comme ils marquent à quelle puissance il faut élever 10 pour qu'il devienne égal au nombre donné, on peut définir les logarithmes ordinaires, l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever 10 pour qu'il devienne égal au nombre donné.

Pour avoir les logarithmes des nombres entre 1 et 10, entre 10 et 100, entre 100 et 1000, &c., il faudra élever 10 à des puissances désignées par des exposans entre o et 1, entre 1 et 2, entre 2 et 3, &c. Par exemple, on trouvera que le logarithme de 2 est 0,3010300, parce que $2 = 10^{0,3010300}$. Le log. de 3 est 0,4771213, parce que $3 = 10^{0,4771213}$. Le logarithme de 4 est 0,6020600, parce que $4 = 10^{0,6020600}$, et ainsi des autres.

Pour pouvoir trouver tous les nombres naturels parmi les termes de la progression géométrique, il est nécessaire que les termes successifs soient très-rapprochés l'un de l'autre. On prendra donc la suivante : $10^{0,0000000}$. $10^{0,0000001}$. $10^{0,0000002}$. $10^{0,0000003}$. $10^{0,0000004}$ . . . . . &c. Le 3010300ème terme sera $10^{0,3010300} = 2$; le 4771213ème terme sera $10^{0,4771213} = 3$; le 10000000ème terme sera $10^{1,0000000} = 10$.

On continuera cette progression à l'infini, et on ne tiendra compte que des termes qui sont égaux aux nombres naturels dont on formera les tables dont nous avons parlé.

176. Il est aisé de voir que les exposans des puissances de 10 forment la progression arithmétique dont les termes doivent correspondre à ceux de la progression géométrique ; ce qui indique assez l'analogie des deux méthodes. Mais à l'époque où l'on a inventé les logarithmes, on ne connoissoit pas encore cette théorie des puissances, et la pa-

tience des calculateurs avoit suppléé à l'imperfection de leurs méthodes.

177. La théorie des logarithmes est une des plus importantes des mathématiques; elle trouve son application dans les calculs les plus relevés, comme dans les plus élémentaires. Les tables de logarithmes vont devenir d'un usage indispensable dans la société, lorsque le système des divisions décimales sera généralement admis. Nous ne pouvons pas entrer ici dans tous les détails que cette théorie comporte; il nous suffit d'en avoir posé les principes, d'avoir fait observer ses rapports avec la théorie des progressions et des puissances, et d'avoir indiqué le moyen de former les tables. Quant à la manière de s'en servir, on consultera les instructions préliminaires qui se trouvent à la tête de toutes les éditions. On y trouvera l'explication des dispositions particulières à chacune d'elles, et la solution des deux problêmes suivans :

1°. Etant donné un nombre, entier ou fractionnaire, trouver son logarithme.

2°. Etant donné un logarithme, trouver à quel nombre il appartient. Nous terminerons ce que nous avons à dire sur les logarithmes, par les deux problêmes suivans.

Problême premier. Trouver, par le moyen des logarithmes, un nombre quatrième, proportionnel à trois nombres donnés.

Puisque les trois termes connus, et le quatrième inconnu, forment une proportion géométrique, leurs logarithmes seront en proportion arithmétique : il faudra donc prendre la somme des logarithmes des moyens, et en retrancher celui de l'extrême connu; le reste sera le logarithme du terme qu'on cherche. Par exemple, soient donnés les trois nombres 14742, 2550, 2457, formant une proportion géométrique avec un quatrième inconnu : on aura donc

14742 : 2550 :: 2457 : x ; donc log. 14742 . log. 2550 ∴ log. 2457 . log. x, et log. x = log. 2550 + log. 2457 — log. 14742.

$$\text{Log. de} \begin{cases} 2550 \ldots\ldots & 3,40654 \\ 2457 \ldots\ldots & 3,39040 \\ \hline & 6,79694 \\ 14742 \ldots\ldots & 4,16856 \end{cases}$$

$$\text{Log. de } x \ldots \quad 2,62838$$

Or, ce logarithme répond dans les tables à 425; donc $x = 425$.

Problême second. Extraire la racine cubique de 4913, et la racine cinquième de 16807.

Dans le premier cas, on prendra le log. de 4913, et on le divisera par 3 : ce log. est 3,691347 ; divisé par 3, il donne 1,230449. Ce log. répond dans les tables au nombre 17; donc la racine cubique du nombre donné est 17.

Dans le second cas, on prendra le log. de 16807, qui est 4,225490 ; on le divisera par 5, et le quotient 0,845098 est le log. de 7 : donc 7 est la racine cinquième du nombre donné.

Ces exemples suffisent pour faire sentir l'avantage que le calcul retire des logarithmes. C'est sur-tout dans les multiplications et les divisions de très-grands nombres, qu'il devient plus sensible. Les fractions décimales exprimées par un grand nombre de chiffres, présenteroient souvent, sans le secours des logarithmes, de grandes multiplications à faire pour obtenir de petits produits; et l'on sent assez que leur but général est de faciliter toutes les opérations de l'arithmétique.

Les Lecteurs qui auront suivi avec attention les règles démontrées dans ces élémens d'arithmétique, pourront s'exercer sur les problêmes suivans.

Problèmes relatifs à toutes les règles d'arithmétique contenues dans ce Traité, et dont on trouvera la solution dans le tableau suivant.

Problème premier. Un particulier qui a fait bâtir une maison, a dépensé pour le compte des maçons 2324 fr.; pour les charpentiers et menuisiers 1934 fr.; pour les serruriers 625 fr.; pour les différens ouvriers 758 fr.; pour les meubles 3458 fr.; à combien lui revient cette maison ?

Problème second. Une armée composée de 45000 hommes, reçoit trois renforts; le premier de 6400 hommes, le second de 7200, le troisième de 8500; de combien de soldats sera composée l'armée entière ?

Problème troisième. Un cultivateur a recueilli 4580 myriagrammes de bled, il doit en garder 1750 pour ensemencer de nouveau, ou pour l'entretien de sa famille; combien pourra-t-il en vendre ?

Problème quatrième. Le célèbre Newton étoit né en 1642, il mourut en 1727; quel âge avoit-il ?

Problème cinquième. On sait que l'année déterminée par Lacaille est de 365 jours 5 heu. 48 min. 49 sec.; de combien de secondes est-elle composée ?

Problème sixième. Un particulier achète 748 moutons, à raison de 12 fr. 35 cent. pièce; combien a-t-il eu à débourser pour les payer ?

Problème septième. 68 mètres de drap ont coûté 4352 fr.; à combien revient le mètre ?

Problème huitième. Un bâtiment monté par 120 hommes, a fait une prise évaluée 180000 fr.; quelle est la part de chacun ?

Probléme neuvième. Quelle est la somme des trois fractions $\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13}$?

Probléme dixième. Quelle est la plus grande des deux fractions $\frac{11}{12}$ et $\frac{12}{13}$? et quelle est leur différence?

Probléme onzième. Un père donne à son fils la moitié de son bien; le fils donne au petit-fils les deux tiers de sa portion; le petit-fils partage également sa portion à ses cinq enfans; quelle portion du bien du père aura chacun des arrière-petits-fils?

Probléme douzième. Une personne fait les trois quarts d'un myriamètre dans les deux tiers d'une heure; quel chemin feroit-elle dans une heure?

Probléme treizième. Réduire la fraction ordinaire $\frac{1}{2.3.4.5.6.7.8.9}$ en fraction décimale.

Probléme quatorzième. Convertir 11 sous 9 deniers en décimes et centimes.

Probléme quinzième. Un commandant a dans sa division 2916 hommes, qu'il veut ranger en bataillon quarré; combien doit-il en mettre de front et de flanc?

Probléme seizième. 56 mètres de drap coûtent 1680 fr.; combien coûteront 8 mètres au même prix?

Probléme dix-septième. Le mètre étant de 3 pieds 11 lig. $\frac{44}{100}$, d'après l'arc du méridien mesuré en 1740, on propose de réduire en mètres et en parties décimales du mètre, 152 toises 3 pieds 2 pouces.

Probléme dix-huitième. Un marchand vendoit une certaine marchandise, à raison de 36 liv. 10 s. 6 d. la toise; combien doit-il vendre, à proportion, le mètre de la même marchandise?

Problême dix-neuvième. On a payé 18 fr. pour huit chevaux pour trois lieues, combien coûteront trente chevaux pour quatre lieues ?

Problême vingtième. Un débiteur laisse à trois créanciers la somme de 114 fr. 42 cent. à partager proportionnellement à leur créance ; il est dû au premier 1124 fr. 36, au second 1015 fr. 43, au troisième 1213 fr. 53 ; combien doit-il revenir à chacun ?

Problême vingt-unième. Un négociant de Pétersbourg a à envoyer par la Hollande, à Berlin, une somme de 1000 ducats de Berlin, qu'il veut payer en roubles de Russie : le change de la Russie avec la Hollande étant d'un rouble de Russie pour 47 $\frac{1}{2}$ stuvers de Hollande, et celui de la Hollande avec Berlin étant de cent rixdalles hollandaises, pour 142 rixdalles prussiennes. En Hollande 20 stuvers font un florin, et 2 $\frac{1}{2}$ florins font une rixdalle ; enfin le ducat de Berlin vaut 3 rixdalles prussiennes : on demande combien le négociant doit envoyer de roubles pour payer les 1000 ducats ?

Problême vingt-deuxième. Un homme ayant gardé 1200 fr. pendant un certain temps, rend 1344 fr., capital et intérêt à raison de 3 pour $\frac{0}{0}$; combien de temps le capital a-t-il été gardé ?

Problême vingt-troisième. Un marchand achète des marchandises 2500 fr. payables dans un an, à condition de pouvoir escompter à 8 pour $\frac{0}{0}$, s'il paie comptant ; quelle somme devra-t-il donner ?

Problême vingt-quatrième. Un particulier a une lettre-de-change de 1272 fr. payable dans quatre mois ; il propose au banquier de la lui escompter à raison de 6 pour $\frac{0}{0}$ par an : quelle somme retiendra le banquier ?

Probléme vingt-cinquième. On veut mêler ensemble des vins de différens prix, savoir 4 bouteilles à 10 décimes, et 6 bouteilles à 20 décimes; quel sera le prix moyen du mélange ?

Probléme vingt-sixième. Le kilogramme d'étain étant supposé de 16 décimes, et le kilogramme de plomb de 10 décimes, combien faut-il prendre de l'un et de l'autre pour faire un alliage dont le kilogramme puisse être vendu 12 décimes ?

Probléme vingt-septième. Un orfèvre a trois sortes d'argent; la première qualité contient 7 hectogrammes d'argent fin par kilogramme; la seconde en contient 5, la troisième 4; il a à faire un mélange de 30 kilogrammes à 6 hectogrammes d'argent fin; combien doit-il en prendre de chaque sorte ?

Problême vingt-huitième. Un propriétaire est convenu avec un maçon qui doit lui creuser un puits, de lui donner 3 fr. pour le premier mètre de profondeur, 5 pour le second, 7 pour le troisième, et ainsi des autres, en augmentant toujours de 2 fr. La profondeur du puits est de 40 mètres; on demande combien il est dû au maçon ?

Problême vingt-neuvième. Un propriétaire se propose d'acheter 8 paires de bœufs, aux conditions suivantes : il donne un centime de la première paire, 10 centimes ou un décime de la seconde, 10 décimes ou un franc de la troisième, et ainsi de suite, en décuplant toujours jusqu'à la huitième paire; combien lui coûteroient ces huit paires de bœufs ?

Problême trentième. Un particulier a placé la somme de 12000 fr. à 5 pour $\frac{0}{0}$ pour 10 ans; quelle somme lui reviendra-t-il au bout de 10 ans, y compris l'intérêt de l'intérêt ?

Problême trente-unième. Une personne doit une rente annuelle de 200 fr., qu'elle ne peut pas payer de 8 ans; elle s'engage de payer les arrérages échus, y compris l'intérêt composé; que devra-t-elle à cette époque?

Problême trente-deuxième. Extraire par approximation la racine cinquième de 8,04, en se servant des logarithmes.

Solutions des problêmes précédens.

N°. 1	9099 francs.
N°. 2	67100 hommes.
N°. 3	2830 myriagrammes.
N°. 4	85 ans.
N°. 5	31556929 secondes.
N°. 6	9237 francs, 8 décim.
N°. 7	64 francs.
N°. 8	1500 francs.
N°. 9	$\frac{431}{1716}$.
N°. 10	$\frac{1}{156}$ différence.
N°. 11	$\frac{1}{15}$ du bien.
N°. 12	$1+\frac{1}{8}$ de myriamètre.
N°. 13	0,000002
N°. 14	0,59 centimes.
N°. 15	104 hommes.
N°. 16	268 francs, 57 cent.
N°. 17	297 mèt., 19 centim.
N°. 18	18 francs, 76 cent..
N°. 19	90 francs.

N°. 20. La part du premier est de 38 fr., 36 cent.
du second . . . . 34 , 65
du troisième . . . . 41 , 41

N°. 21. Le négociant doit faire passer $2223\frac{22}{25}$ roub.

N°. 22 . . . . 4 années.

N°. 23 . . . . 2314, 81

N°. 24. . . . . 24 francs, 95 cent.
N°. 25. . . . . 16 décimes
N°. 26. . . 2 gram. d'étain et 4 gram. de plomb.
N°. 27. 16 kilog. du 1er, 12 kil. du 2e et 2 kil. du 3e.

Nota. Ce problème est susceptible de plusieurs solutions, comme on le verra dans l'algèbre.

N°. 28. . . . . 1680 francs.
N°. 29. . . . . 111111 fr., 11 cent.
N°. 30. . . . . 20040 francs.
N°. 31. . . . . 1842 fr., 85 cent.
N°. 32. 1,517

SECONDE PARTIE.

DE L'ALGÈBRE.

1. PARMI les propriétés calculables de la grandeur, les unes sont tout-à-fait dépendantes du système de numération et des signes particuliers par lesquels on représente les nombres; les autres sont indépendantes du système de numération, mais sont toujours exprimées par des signes particuliers; d'autres enfin sont indépendantes du système de numération et des signes, et ne sont autre chose que les propriétés générales des rapports, qui ont lieu de quelque manière que ces rapports soient désignés.

Les propriétés de la grandeur considérées sous le premier point de vue, constituent proprement les différens systêmes d'arithmétique, quand on les considère sous le second, elles constituent l'arithmétique en général dont nous avons déjà parlé; mais si, au lieu de fixer les quantités qu'on considère, au lieu de les déterminer en nombre, on veut les considérer de la manière la plus générale, c'est-à-dire indépendamment de tout système de numération et des signes qui les désignent, on aura l'arithmétique la plus universelle dont on puisse s'occuper, c'est-à-dire l'algèbre.

2. Dans l'algèbre, la grandeur devant être exprimée d'une manière indépendante de tout système particulier, il faudra employer, pour la désigner, des caractères généraux, qui ne représentant par leur nature aucune grandeur particulière, puis-

sent représenter indistinctement toute sorte de grandeur.

Les lettres de l'alphabet ont paru les plus simples, et les plus propres pour cet usage ; en sorte qu'en algèbre, les caractères a, b, c, d, &c., ne représentent pas l'idée de sons articulés, mais désignent chacun en particulier des grandeurs indépendantes les unes des autres. On emploie aussi quelquefois la même lettre marquée d'un accent pour désigner des quantités différentes. Ainsi a et a', b et b', c et c'... sont des signes différens, portant dans l'entendement l'idée de grandeurs différentes, lorsqu'ils sont employés dans le même calcul.

Les lettres de l'alphabet grec servent aussi souvent aux mêmes usages, sur-tout dans les parties transcendantes des mathématiques. Nous nous servirons indistinctement des unes et des autres dans nos calculs.

L'algèbre est une langue dont un des principaux avantages est de faire appercevoir très-facilement les rapports que différentes grandeurs ont entr'elles, et de réduire les raisonnemens à des opérations en quelque sorte mécaniques. Par le moyen de cette langue, on rend souvent sensibles, par un calcul très-simple, un grand nombre de vérités qui demanderoient une longue suite de raisonnemens pour être expliquées : elle doit sur-tout sa généralité et sa précision à la simplicité des termes et des signes qu'elle emploie. Nous en avons fait connoître une partie dans l'arithmétique. Nous allons donner ici ceux qui ne sont pas encore expliqués.

Explication des signes et des termes dont on se sert dans l'algèbre.

3. Un terme algébrique est formé par une ou plusieurs lettres réunies sans interposition de signe.

On nomme *monome* une quantité qui n'est composée que d'un seul terme.

Si la quantité est composée de deux termes, on la nomme *binome;* si elle en a trois, elle est appelée *trinome;* si elle en a quatre, *quadrinome:* en général, une quantité composée de plusieurs termes, est dite un *polynome*.

4. Les quantités commensurables sont celles qui ont quelque partie aliquote commune, ou qui peuvent être mesurées par quelque mesure commune, sans qu'il y ait aucun reste dans l'une ni dans l'autre.

Les quantités incommensurables sont celles qui n'ont point de mesure commune, quelque petite qu'on la suppose.

Une quantité rationnelle est une quantité commensurable avec son unité, ou dont on peut assigner la commune mesure avec une quantité donnée.

5. Une quantité irrationnelle est une quantité incommensurable avec l'unité, ou dont on ne peut assigner le rapport avec l'unité, comme la racine quarrée de 2.

Une quantité imaginaire est une quantité impossible, c'est-à-dire, une quantité dont on ne peut se faire aucune idée.

6. Un terme ou une quantité précédée du signe + est dite une quantité *positive;* si elle est précédée du signe —, elle est appelée *négative*.

Les termes positif et négatif sont d'un fréquent usage dans l'algèbre; il importe d'en avoir des idées exactes.

Les mots *positif* et *négatif* énoncent des propriétés relatives. Une quantité est dite positive par rapport à une autre de même nature, mais prise dans un sens opposé, et qu'on appelle pour cette raison négative; et réciproquement, si la seconde est dite

positive, la première sera nommée négative. Toute quantité par sa nature est considérée comme positivement existante; et lorsqu'il n'y a point de comparaison établie, on n'a pas besoin d'énoncer qu'elle est positive. La quantité, au contraire, n'existe négativement que par rapport à une autre qui lui est opposée, et cette opposition a besoin d'être énoncée pour être entendue. Qu'un homme ait une somme d'argent représentée par 50 fr., et qu'il doive 30 fr., il regardera les 50 fr. comme une quantité positive, et les 30 fr. comme une quantité négative; et s'il veut connoître l'état de sa fortune, il retranchera 30 de 50, et écrira $50 - 30 = 20$.

Ou plus généralement, si de la quantité représentée par a, on veut retrancher la quantité représentée par b, il est évident qu'il n'y a pas d'autre manière d'indiquer cette soustraction, que d'écrire $a - b$. Si $b = a$, le reste de la soustraction sera zéro; si $b < a$, le reste sera positif : mais si $b > a$, l'excès de b sur a sera nécessairement négatif. Or, les quantités représentées par b et a doivent être de même nature (Arith. 25) : donc leur différence sera aussi de même nature qu'elles, et son signe négatif, lorsque $b > a$ annonce seulement que cette différence est prise dans un sens opposé à la quantité a.

Supposons qu'un homme qui a 20 fr. en doive 30; s'il veut connoître l'état de sa fortune, il écrira $20 - 30 = - 10$; c'est-à-dire qu'après avoir donné tout ce qu'il a, il devra encore 10 fr., ou qu'il lui manque encore 10 francs pour que sa fortune soit zéro.

Les quantités négatives servent quelquefois à redresser une erreur, ou une fausse supposition qu'on a faite dans le raisonnement. Imaginons, par exemple, qu'on cherche un nombre qui, ajouté à 12, fasse 9, on trouveroit par les règles de l'algèbre que

ce nombre est —3, ce qui annonceroit que le nombre cherché est 3, mais qu'au lieu d'être ajouté à 12, il doit en être retranché; de sorte qu'on auroit dû énoncer la question ainsi : Trouver un nombre qui, retranché de 12, laisse 9 pour reste.

On voit par ce que nous venons de dire que les quantités négatives sont aussi réelles que les positives, et qu'elles sont de même nature que les positives, auxquelles elles sont comparées.

Il n'y a donc pas réellement de quantités négatives isolées. —3, pris abstraitement, ne présente à l'esprit aucune idée; mais si je dis qu'un homme a donné à un autre —3 écus, cela veut dire en langage intelligible, qu'il lui a ôté 3 écus : en sorte qu'*ajouter une quantité négative, ou retrancher une quantité positive, présente la même idée en algèbre.*

Plusieurs mathématiciens regardent les quantités négatives comme plus petites que zéro. Nous allons faire voir que cette idée n'est pas juste.

L'idée de zéro est celle d'une chose plus petite que toute quantité assignable; c'est la limite des grandeurs qui vont sans cesse en diminuant, en suivant toujours la même loi. On ne peut donc pas concevoir une quantité plus petite que zéro, sans être en contradiction avec l'idée de zéro.

Une quantité positive, qui, en diminuant continuellement, devient négative, passe nécessairement par zéro; mais une fois parvenue à cet état, elle ne diminue plus; elle augmente dans un sens contraire, et c'est pour cette raison qu'elle est dite négative. La géométrie nous en fournira plusieurs exemples. Nous nous contenterons de rapporter le suivant, tiré de l'arithmétique. Supposons un homme qui a 50 fr., et qui dépense un franc par jour, au bout de 50 jours sa fortune sera réduite à zéro; s'il continue à dépenser également, sa fortune deviendra

—1,

—1, — 2, —3. . . . francs, c'est-à-dire que sa dette augmentera continuellement. On peut bien dire que sa fortune est au-dessous de zéro, mais cela ne signifie pas que ce qu'il doit est plus petit que zéro; car il pourra toujours se libérer avec une somme égale à sa dette, et, si sa dette étoit plus petite que zéro, il lui suffiroit de donner une somme plus petite que zéro; ce qui ne présente aucune idée.

L'idée d'une quantité plus petite que zéro, sera donc pour nous l'idée d'une quantité positive, qui a diminué jusqu'à ce qu'elle soit devenue zéro, et qui ensuite a augmenté dans un sens ou une direction opposée à la première.

7. Une formule est un résultat général tiré d'un calcul algébrique, et renfermant une infinité de cas semblables.

Les lettres de l'alphabet dont est composée une formule algébrique, n'ayant aucune valeur particulière, ni par elles-mêmes, ni par le rang qu'elles occupent, ne conservent pour ainsi dire que l'empreinte des propriétés générales des grandeurs qu'elles représentent; et comme ces lettres peuvent représenter toutes sortes de grandeurs, la formule algébrique représente tous les cas particuliers qui jouissent de la même propriété générale.

Des opérations algébriques.

8. La grandeur considérée d'une manière générale, et indépendamment des signes particuliers qui peuvent la représenter, est susceptible des mêmes opérations, que lorsqu'elle est représentée par des caractères particuliers; c'est-à-dire qu'elle peut être ajoutée, soustraite, multipliée et divisée. Nous allons enseigner les moyens de faire l'addition, la soustraction, la multiplication et la division algé-

brique : mais il faut remarquer que les opérations de l'algèbre ne sont, pour la plupart, que des opérations indiquées ; et toutes les règles de cette science consistent à exprimer, de la manière la plus simple et la plus abrégée, le résultat des opérations qu'on peut faire sur les nombres exprimés d'une manière générale.

De l'addition des quantités algébriques.

9. Si les deux quantités a et b doivent être ajoutées ensemble, il est clair que, tant qu'elles seront indéterminées, on ne peut point effectuer cette addition ; et la seule manière de l'indiquer est d'écrire $a+b$. Pareillement si, à ces deux quantités, il faut en ajouter une troisième c, il faudra écrire $a+b+c$; ce qui indique que, lorsque les quantités a, b, c, seront déterminées, il faudra les réunir en une seule, qui soit égale à leur somme.

Si aux quantités positives $a+b$, il falloit ajouter le binome $c-d$, il est évident qu'il faudroit écrire $a+b+c-d$; ce qui indique que, si les quantités a, b, c, d, étoient déterminées, après avoir pris la somme des trois représentées par a, b, c, il faudroit en retrancher celle représentée par d. On voit par-là, qu'en algèbre, *ajouter* ne signifie pas toujours *augmenter*. Car si, par exemple, la quantité d est plus grande que la quantité c, en ajoutant $c-d$ aux deux premières, le résultat présente l'idée d'une somme plus petite qu'avant l'addition.

Le procédé que nous avons suivi pour faire ces additions, est indépendant de toute hypothèse sur la nature de la quantité, et sur la manière de l'exprimer : c'est pourquoi nous pouvons prescrire la règle suivante :

Pour ajouter ensemble plusieurs quantités al-

gébriques, il suffit de les écrire les unes à la suite des autres, avec leurs signes, en observant que celles qui n'ont point de signe, sont censées avoir le signe + : on réduit ensuite à un seul tous les termes semblables.

Je suppose, par exemple, qu'il soit question d'ajouter $5a$ avec $3a$; on pourroit écrire $5a+3a$, et l'addition seroit indiquée. Mais avec un peu d'attention, on voit que cette opération peut être indiquée d'une manière plus simple : car quelque nombre que représente a, il est évident que ce nombre pris cinq fois, plus ce même nombre pris trois fois, est égal au même nombre pris huit fois. Ainsi, au lieu de $5a+3a$, il est plus simple d'écrire $8a$.. par la même raison $5a-3a=2a$.

10. *La réduction consiste donc à prendre la somme de tous les termes semblables et de même signe : on retranche ensuite la plus petite somme de la plus grande, abstraction faite du signe, et l'on donne à la différence le signe de la plus grande somme.*

Exemple premier. Ajouter ensemble les quantités suivantes :

$$\begin{array}{l} a+b-c+d \\ m-n+p-q \\ \hline \end{array}$$

Somme.... $a+b-c+d+m-n+p-q$

$$\begin{array}{l} \alpha+\beta-\delta \\ \varphi+\psi-\lambda \\ \hline \end{array}$$

Somme... $\alpha+\beta-\delta-\lambda+\varphi+\psi$

Dans cet exemple, il n'y a pas de réduction, parce qu'il n'y a pas de termes semblables.

Exemple deuxième. On propose d'ajouter ensemble les quantités suivantes :

$$\begin{array}{l} a+b+c-d \\ b+c+m-n \\ m+a-b+c \\ \hline \end{array}$$

Som. $a+b+c-d+b+c+m-n+m+a-b+c.$

Il y a ici des termes semblables; savoir : le premier et le dixième qui, réunis, font $2a$; le deuxième et le cinquième réunis, donnent $2b$, et le onzième $-b$, soustrait des deux autres, il reste $+b$; le troisième, le sixième et le douzième réunis, donnent $3c$; le septième et le neuvième, donnent $2m$. Donc, toute réduction faite, l'addition ci-dessus se réduit à... $2a+b+3c-d+2m-n$.

11. Le chiffre qu'on place au-devant d'un terme, pour marquer combien de fois ce terme doit être répété, soit positivement, soit négativement, est nommé *coefficient*. Ainsi dans $2a$, $3c$... 2 est le coefficient du premier terme, et 3, celui du second.

Lorsqu'un terme n'est précédé d'aucun coefficient, il est censé avoir 1, parce que toute quantité est toujours répétée une fois, ainsi $+b-d-n$ est la même chose que $+1b-1d-1n$.

Le coefficient ne fait pas partie du terme; il indique seulement la réduction, ou réunion de plusieurs termes en un seul. Ainsi $3c$ est une manière abrégée d'écrire $c+c+c$.

Exemple troisième. Ajouter ensemble les quantités suivantes.

$$\begin{array}{l} 2a+3b-5c+4d \\ 4b+2c-2d+m \\ c+d-3m+4n \\ \hline 2a+7b-2c+3d-2m+4n \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 6\alpha+15\beta-8\pi+7\varphi \\ 2\alpha-12\pi+4\varphi-6\psi. \\ \hline 8\alpha+15\beta-20\pi+11\varphi-6\psi. \end{array}$$

On voit par tout ce que nous venons de dire sur l'addition algébrique, qu'elle est indépendante de toute hypothèse, et qu'elle se réduit à indiquer de la manière la plus simple, le résultat de plusieurs termes exprimés généralement, et à ne laisser, pour ainsi dire, à celui qui voudra les traduire en nombres, que le moins de travail qu'il est possible.

De la soustraction des quantités algébriques.

12. Soustraire une quantité d'une autre, c'est diminuer la première de toute la valeur de la seconde. Donc si la première quantité est représentée par a, et la seconde par b, la soustraction consiste à diminuer la quantité a de la quantité b. Or, la manière la plus naturelle et la plus simple d'indiquer cette soustraction, est d'écrire $a-b$. Donc pour retrancher une quantité positive d'une autre quantité positive, il faut changer le signe de la quantité qui doit être soustraite, et l'écrire, en cet état, à la suite de la quantité proposée.

Si de la quantité $a+b$ il falloit retrancher la quantité $c-d$, on écriroit $a+b-c+d$. C'est-à-dire qu'on changeroit les deux signes de la seconde quantité, le positif en négatif et le négatif en positif.

En effet, si de la quantité $a+b$, on retranche c, il est clair qu'on doit écrire $a+b-c$: mais en retranchant c, on retranche trop, car on ne doit retrancher que c diminué de d ou $c-d$. Il faut donc corriger l'erreur en ajoutant d; on écrira donc $a+b-c+d$ (a). Ce qui vient d'arriver dans cet

(a) L'exemple suivant rendra ce changement de signe plus sensible. Un particulier a 36 francs en six pièces de 6 francs. Il doit 15 francs. Pour acquitter sa dette, il donne trois pièces

exemple, doit avoir lieu nécessairement en algèbre, parce que les quantités y étant indéterminées, on ne peut qu'indiquer les réductions des termes qui ne sont pas semblables.

La soustraction des polynomes se fait donc *en changeant tous les signes, les + en — et les — en + de la quantité à soustraire; on l'écrit ainsi à la suite de la première, on fait ensuite la réduction des termes semblables, comme nous l'avons expliqué dans l'addition.* Il suit de cette règle, et de ce que nous avons dit (6) que, dans la soustraction algébrique, le reste peut être plus grand que la première somme. Car si par exemple on a $d > c$, la quantité $a+b$ se trouvant diminuée de c et augmentée de d, sera réellement plus grande que $a+b$.

Exemple premier. De la quantité $12m-5n+3p$, on propose de soustraire $3m-2n+2r$. On écrira $12m-5n+3p-3m+2n-2r$. Et en faisant la réduction $9m-3n+3p-2r$.

Exemple 2e. De $5a-2c+6d-4x$
Soustraire... $3b-2a+4c-2d+x-y$

reste $5a-2c+6d-4x-3b+2a-4c+2d-x+y$,
ou en faisant la réduction $7a-3b-6c+8d-5x+y$.

La soustraction est comme l'addition, indépendante de toute supposition : elle indique comme elle les résultats de la manière la plus simple et la

---

de 6 francs, et on lui rend une pièce de 3 francs. Donc de 36 il doit retrancher 15, ou 18 — 3. Il retranche 18, et on lui rend 3; il lui restera donc 36 — 18 + 3, où l'on voit que la quantité — 3 qui accompagnoit 18 avant la soustraction, est devenue + 3 après la soustraction.

plus abrégée, pour pouvoir les traduire en calculs arithmétiques.

De la multiplication des quantités algébriques.

13. La multiplication algébrique est une opération par laquelle on ajoute à elle-même une quantité, qu'on nomme multiplicande, autant de fois que l'unité est contenue dans le multiplicateur. Ainsi, multiplier la quantité ou le nombre représenté par a, par le nombre représenté par b, c'est ajouter la quantité a à elle-même, autant de fois que la quantité b contient l'unité. Or ici, la nature de la question ne nous présente aucun moyen naturel d'indiquer cette multiplication; il a fallu avoir recours à un principe de convention. Ce principe est que deux ou plusieurs lettres écrites les unes à côté des autres sans interposition de signe, présenteront l'idée de la multiplication des quantités qu'elles représentent. Ainsi, a multiplié par b, qu'on peut écrire $a \times b = ab$, présente l'idée de la quantité représentée par a, multipliée par la quantité représentée par b. Par la même raison, l'expression abc, présente l'idée d'un produit composé de trois facteurs a, b, c.

Ce principe est extrêmement simple, et dans sa simplicité et sa généralité, il présente un avantage bien précieux, c'est de conserver toujours dans les produits les facteurs comme isolés, ce qui facilite les réductions.

Nous pouvons donc établir la règle suivante pour la multiplication des lettres dans les monomes. *Ecrivez à la suite les unes des autres, et sans interposition de signe, toutes les lettres qui se trouvent dans le multiplicande et le multiplicateur.* Ainsi, $ab \times cd = abcd \ldots pqr \times mns = mnpqrs \ldots \alpha\beta \times \omega\varphi = \alpha\beta\varphi\omega$.

Si la même lettre se trouvoit au multiplicande et au multiplicateur, il faudroit l'écrire deux fois dans le produit : Par exemple, $b\times b=bb$... $bb\times b=bbb$.... $abc\times abd=aabbcd$.

14. Pour éviter la répétition de la même lettre dans un même terme, on se contente de l'écrire une seule fois, et on met à sa droite un petit chiffre un peu élevé qu'on nomme *exposant* (arith. 109), et qui sert à marquer combien de fois la lettre doit être répétée comme facteur. Par exemple, dans $b\times b$, au lieu d'écrire bb comme ci-dessus, on écrit b^2 ; dans $bb\times b$, on écrira b^3, et ainsi des autres exemples.

Pour multiplier une lettre affectée d'un exposant, par la même lettre affectée d'un autre exposant, on écrit cette lettre une seule fois, et on lui donne pour exposant la somme des deux exposans qu'elle avoit dans le multiplicande et le multiplicateur. Ainsi, $b^3\times b^2=b^5$, cette règle est une conséquence nécessaire de la règle des lettres. En effet, l'exposant du multiplicande et celui du multiplicateur marquent combien de fois la même lettre est facteur dans l'un et dans l'autre ; or, dans le produit, elle doit se trouver autant de fois facteur qu'elle l'est dans le multiplicande et le multiplicateur, donc elle y aura pour exposant la somme de ceux qu'elle a dans les deux facteurs ; ainsi, $a^3b^4\times a^4b^5=a^7b^9$.... $b^3cd^4\times bc^2d^6=b^4c^3d^{10}$.

Il faut remarquer que lorsqu'une lettre n'a pas d'exposant, il est censé être l'unité ; ainsi a est la même chose que a^1.

15. Lorsque les deux monomes qu'on veut multiplier ensemble ont des coefficiens autres que l'unité, on les multiplie selon les règles de l'arithmétique : ainsi $3a^2b\times 4ab^3=12a^3b^4$. Cette règle est évidente par la nature même des coefficiens.

On doit bien prendre garde de ne pas confondre le coefficient avec l'exposant; le premier désigne une addition, et le second désigne une multiplication. Par exemple, dans $3b$ et b^3, le premier désigne $b+b+b$, et le second désigne bbb. Le coefficient affecte tout le terme au-devant duquel il se trouve, et l'exposant n'affecte que la lettre à côté de laquelle il est : ainsi $3a^2b$ signifie $a^2b+a^2b+a^2b$, et a^2b^3 est une manière abrégée d'écrire $aa\ bbb$.

16. Jusqu'ici nous n'avons pas fait attention aux signes qui précédoient le multiplicande et le multiplicateur, ou plutôt nous avons supposé qu'ils étoient tous deux positifs; mais ils peuvent être tous les deux négatifs, ou l'un positif, et l'autre négatif.

Si les deux signes sont positifs, le signe du produit doit être positif : ainsi $+a\times+b=+ab$. Cette règle n'a pas de difficulté.

Si l'une des quantités est positive, et l'autre négative, le produit sera négatif : ainsi $-a\times+b=-ab$. En effet, il s'agit de répéter $-a$ autant de fois qu'il y a d'unités dans b; il faudra donc indiquer la multiplication, en écrivant b à côté de $-a$, ce qui donnera $-ab$.

On peut encore dire que multiplier $-a$ par b, c'est ajouter $-a$ à lui-même, autant de fois qu'il y a d'unités dans b; mais une somme de quantités négatives sera toujours négative : donc le produit de $-a\times b$ doit être $-ab$.

Si les deux quantités qu'on multiplie sont négatives, le produit sera positif, c'est-à-dire que $-a\times-b=+ab$.

Cette règle présente quelques difficultés pour être bien saisie : on a de la peine à concevoir que le produit de $-a$ par $-b$ soit le même que celui de $+a$ par $+b$. Mais la difficulté disparoîtra, si on se rappelle ce que nous avons dit sur la nature des quan-

tités négatives (6), et sur le rapport qui règne entre le produit, le multiplicande, le multiplicateur et l'unité (arith. 31). En effet, pour multiplier $-a$ par -3, par exemple, il s'agit (par la nature des quantités négatives) d'ajouter $-a$ à lui-même 3 fois, ce qui donnera $-3a$, et de retrancher ce produit, à cause du signe $-$ qui précède le multiplicateur. Mais pour retrancher une quantité négative, il faut changer son signe (12) : donc il faudra écrire $+3a$. Ce raisonnement sera le même, quel que soit le multiplicateur : on peut donc dire généralement que $-a \times -b = +ab$.

On peut se servir encore du raisonnement suivant, pour prouver que $-a \times -b = +ab$.

$-a$ par $b-b$ est la même chose que $-a$ par zéro, et donne par conséquent zéro pour produit. Mais le produit de $-a$ par $+b$ est $-ab$ (16) : donc celui de $-a$ par $-b$ doit être d'un signe contraire, c'est-à-dire $+ab$, pour détruire le premier terme (a).

En résumant tout ce que nous venons de dire sur la multiplication des monomes, nous dirons qu'il y a quatre règles à suivre pour faire la multiplication ; celle des signes, celle des coefficiens, celle des lettres et celle des exposans.

1°. La règle des signes est que, *si le multiplicande et le multiplicateur sont tous les deux des quantités positives, ou tous les deux des quantités négatives, le produit, dans les deux cas, sera toujours positif.*

(a) Cette règle des signes est si simple, que Diophante, le premier des auteurs grecs chez qui on a trouvé les premières idées de l'algèbre, la regarde comme un principe évident par lui-même, et qui n'a pas besoin de démonstration.

Si l'un des deux facteurs est positif et l'autre négatif, le produit sera négatif.

C'est cette règle qu'on trouve énoncée dans presque tous les livres élémentaires, d'une manière aussi fausse qu'incorrecte, lorsqu'on dit que $+\times+$ donne $+$, $-\times-$ donne $+$, $+\times-$ donne $-$, et $-\times+$ donne $-$.

2°. La règle des coefficiens est *de les multiplier entr'eux selon les règles de l'arithmétique;*

3°. La règle des lettres *est d'écrire au produit les unes à côté des autres toutes celles qui se trouvent au multiplicande et au multiplicateur;*

4°. La règle des exposans *est d'ajouter ceux des lettres semblables dans le multiplicande et le multiplicateur: la somme sera l'exposant de la même lettre dans le produit.*

Exemples. $5a^3b^2c\times4a^2bc^3m=20a^5b^3c^4m\ldots$

$-4ab^3c^2\times2a^2bc=-8a^3b^4c^3\ldots\ldots$

$-3x^2z^3y\times-5xy^2z=+15x^3z^4y^3.$

17. Si le multiplicande est un polynome, et le multiplicateur un monome, on multiplie séparément chaque terme du multiplicande par celui du multiplicateur.

Exemples. $3a^2bc-2b^3c+6abc^3$

$4abc^3$

Produit... $12a^3b^2c^4-8ab^4c^4+24a^2b^2c^6$

$4a^3b^7c^8-3m^2n^3p^6$

$8p^2r^3s$

Produit... $32a^3b^7c^8p^2r^3s-24m^2n^3p^8r^3s.$

On observera que l'ordre des termes et des lettres est absolument arbitraire; mais la clarté exige qu'on suive, en les écrivant, l'ordre alphabétique.

18. Enfin, si le multiplicande et le multiplicateur sont tous les deux composés de plusieurs termes, on multipliera chaque terme du multiplicande par chaque terme du multiplicateur; on ajoutera les produits, et l'on fera la réduction.

Exemples.

$$\begin{array}{l} a^2-2ac+c^2 \\ a-c \\ \hline a^3-2a^2c+ac^2 \\ \quad -a^2c+2ac^2-c^3 \\ \hline a^3-3a^2c+3ac^2-c^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a-b \\ c-d \\ \hline ac-bc-ad+bd \end{array} \qquad \begin{array}{l} a+b \\ a-b \\ \hline a^2+ab \\ \quad -ab-b^2 \\ \hline a^2-b^2 \end{array} \quad (a).$$

Quelquefois, au lieu d'effectuer les multiplications complexes, on se contente de les indiquer, en écrivant entre deux crochets le multiplicande et le multiplicateur. Par exemple, si on veut multiplier $a+b$ par $c+d$, on peut se contenter d'écrire $(a+b)(c+d)$. Cette expression est souvent préférable à l'opération effectuée, parce qu'elle semble exiger moins d'opérations arithmétiques.

(a) Cette multiplication nous fournit un exemple d'une formule algébrique contenant l'expression d'un théorême très-général, et d'un usage familier dont l'énoncé est que la somme de deux quantités multipliée par leur différence donne pour produit la différence de leurs carrés.

De la division des quantités algébriques.

19. La division, en algèbre comme en arithmétique, est une opération par laquelle étant données une quantité qu'on appelle dividende, et une quantité qu'on nomme diviseur, il faut en trouver une troisième qu'on nomme quotient, laquelle étant multipliée par le diviseur, produise le dividende.

La division est, par sa nature, l'inverse de la multiplication ; elle décompose ce que la multiplication compose. Les opérations par lesquelles on trouve le quotient, doivent être l'inverse de celles par lesquelles on trouve les produits. Ainsi, lorsque le dividende et le diviseur n'ont qu'un seul terme, 1°. *on divise le coefficient du dividende par celui du diviseur ;* 2°. *on retranche les exposans des lettres du diviseur, de ceux des lettres semblables du dividende ;* 3°. *s'il y a dans le diviseur des lettres qui ne se trouvent pas dans le dividende, on ne fait qu'indiquer la division, en les écrivant au dénominateur ;* 4°. *enfin, on donne au quotient le signe + ou le signe —, suivant que les signes du dividende et du diviseur sont les mêmes ou contraires.*

Toutes ces règles résultent de ce que le produit du quotient par le diviseur doit être égal au dividende, non-seulement dans sa quantité, mais encore dans son signe.

Ainsi, le quotient de $+ab$, divisé par $+b$, est $+a$; celui de $-abc$, par $+ab$, est $-c$; $-xyz$, divisé par $-xy$, donne $+z$.

Par la même raison, $\frac{8abc}{2ac} = 4b \ldots -\frac{6a^2b^3c^4}{3abc}$ $= -2ab^2c^3 \ldots \frac{-12ab^3c^5}{-3ac^2m} = +\frac{4b^3c^3}{m}$. On vérifie

ces quotiens en les multipliant par le diviseur; le produit doit être égal au dividende de même signe que lui.

20. La règle que nous avons prescrite pour les exposans, conduit à une remarque importante. Si l'exposant d'une lettre commune au dividende et au diviseur, est plus grand dans le diviseur que dans le dividende, alors l'exposant du quotient se trouvera négatif. Ainsi $\frac{a^2}{a^5} = a^{2-5} = a^{-3}$; mais, d'un autre côté, $\frac{a^2}{a^5}$ est la même chose que $\frac{1}{a^3}$; donc $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$.

On voit donc qu'une quantité élevée à une puissance négative, est égale à l'unité divisée par la même quantité élevée à la même puissance positive. On peut donc passer d'une de ces expressions à l'autre, sans altérer l'exactitude des calculs, d'où résulte la règle suivante :

On peut faire passer une quantité du dénominateur au numérateur et réciproquement, en l'effaçant là où elle est d'abord, pour l'écrire dans l'autre terme, en donnant un signe contraire à son exposant. Ainsi $\frac{b^3}{c^5} = \frac{c^{-5}}{b^{-3}} \ldots a^2 b^3 c^{-4} = \frac{a^2 b^3}{c^4} \ldots\ldots \frac{3\alpha\beta}{\delta} = 3\alpha\beta\delta^{-1}$. Rien n'est plus commun en algèbre que les puissances négatives ; et il importe de s'en former des idées exactes.

21. Si l'on avoit à diviser a^5 par a^5, il est visible que le quotient seroit 1, parce que toute quantité se contient elle-même une fois; mais en suivant la règle prescrite pour les exposans dans la division, on

auroit $\frac{a^5}{a^5} = a^{5-5} = a^0$: donc $a^0 = 1$; c'est-à-dire que *toute quantité élevée à la puissance zéro, représente l'unité.* Ainsi $3^0 = 1 \ldots 8^0 = 1 \ldots 100^0 = 1 \ldots$ &c. Cette seconde remarque n'est pas moins importante que la précédente.

22. Si le dividende est composé de plusieurs termes, et le diviseur d'un seul, on divisera chaque terme du dividende par celui du diviseur; la somme des quotiens partiels formera le quotient total.

Exemple. Soit proposé de diviser le polynome $6a^4b^2 - 4a^2b^3 + 2ab^2c^2$ par $2ab^2$... on arrange le dividende et le diviseur comme dans les divisions numériques : on divise ensuite successivement chaque terme du dividende par le diviseur; on écrit les quotiens à mesure qu'on les trouve, comme on le voit dans cet exemple :

$$6a^4b^2 - 4a^2b^3 + 2ab^2c^2 \left\{ \frac{2ab^2}{3a^3 - 2ab + c^2} \right.$$

23. Si le dividende et le diviseur sont l'un et l'autre composés de plusieurs termes, le calcul demande un peu plus d'attention : il faut commencer par disposer les termes, de manière que la division se présente sous la forme la plus commode. On nomme cette opération préliminaire, *ordonner les termes.*

Pour ordonner les termes, on choisit à volonté une lettre qui se trouve dans le dividende et dans le diviseur : on écrit pour premier terme du dividende, celui où la lettre, par rapport à laquelle on ordonne, a le plus grand exposant; on écrit pour second terme, celui où la même a le plus grand exposant après le premier, et ainsi des autres termes. On en fait autant pour le diviseur; et cet arrangement une fois fait, on n'a aucune peine à choisir les termes

qui doivent se diviser, parce qu'ils se trouvent arrangés dans l'ordre convenable.

Lorsqu'il se trouve plusieurs termes dans lesquels la lettre par rapport à laquelle on ordonne, a le même exposant, on les écrit les uns sous les autres, ou les uns à côté des autres, et ils sont censés ne faire qu'un seul terme.

Après avoir ordonné les termes, 1°. *on divise le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur ; on a le premier terme du quotient :* 2°. *on multiplie ce terme du quotient par tous les termes du diviseur ;* 3°. *on écrit les produits sous le dividende pour en faire la soustraction, et pour cela on change les signes, les positifs en négatifs, et les négatifs en positifs ;* 4°. *on efface les termes qui se détruisent ; ceux qui restent forment le second membre de division, dont le premier terme, divisé pareillement par celui du diviseur, donne le second terme du quotient, et ainsi de suite.*

Exemple premier. On propose de diviser $12a^4b^3cd - 15a^3bc^3g - 9a^5bc^2 + 6a^8c + 10a^6c^2g - 8a^7b^2d$ par $5c^2g - 4ab^2d + 3a^2c$.

On ordonnera le dividende et le diviseur par rapport à la lettre a.

$$\begin{array}{l|l} 6a^8c - 8a^7b^2d + 10a^6c^2g - 9a^5bc^2 + 12a^4b^3cd - 15a^3bc^3g & 3a^2c - 4ab^2d + 5c^2g \\ \underline{-6a^8c + 8a^7b^2d - 10a^6c^2g} & 2a^6. - 3a^3bc. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 1^{er}\text{ reste. . .} & -9a^5bc^2 + 12a^4b^3cd - 15a^3bc^3g \\ & \underline{+9a^5bc^2 - 12a^4b^3cd + 15a^3bc^3g} \\ 2^{e}\text{ reste. . .} & \quad 0 \qquad\qquad 0 \qquad\qquad 0 \end{array}$$

On divise d'abord le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur ; et comme ils sont tous les deux positifs, le quotient sera aussi positif. On divise le coëfficient 6 par le coëfficient 3 ; on écrit 2 au quotient : a^8 divisé par a^2, donne a^6 ; c divisé

visé par c, donne 1; donc le premier terme du quotient sera $2a^6$: on multiplie ce terme par les trois termes du diviseur, ce qui donne $6a^8c - 8a^7b^2d + 10a^6c^2g$. Ce produit doit être retranché du dividende : on l'écrit donc sous le dividende, en changeant les signes (12). Ils sont égaux, chacun à chacun, avec les trois premiers termes du dividende; donc ils se détruisent : le second membre de division sera composé des trois derniers termes du dividende.

On divise $-9a^5bc^2$ par $3a^2c$; le quotient est $-3a^3bc$, qu'on écrit à côté du premier. On multiplie le diviseur par ce second quotient comme on a fait pour le premier : on écrit le produit sous les termes restans, en ayant soin de changer les signes; et comme après avoir fait la réduction, il ne reste rien, on doit conclure que le quotient exact est $2a^6 - 3a^3bc$. Pour s'en assurer mieux, on n'a qu'à multiplier ce quotient par le diviseur, et on trouvera pour produit le dividende. Voici un second exemple dont nous supprimerons l'explication.

Exemple second. On propose de diviser $b^5 - c^5$ par $b - c$.

On procédera, comme dans l'exemple ci-dessus :

Dividende.	$b^5 - c^5$	$b - c$
	$-b^5 + b^4c$	$b^4 + b^3c + b^2c^2 + bc^3 + c^4$
1er reste..	$b^4c - c^5$	
	$-b^4c + b^3c^2$	
2e reste..	$b^3c^2 - c^5$	
	$-b^3c^2 + b^2c^3$	
3e reste..	$+b^2c^3 - c^5$	
	$-b^2c^3 + bc^4$	
4e reste..	$+bc^4 - c^5$	
	$-bc^4 + c^5$	
5e reste..	o o	

Il sera très-utile aux commençans de s'exercer sur les divisions; et pour trouver des exemples qui réussissent, il faudra prendre deux polynomes, les multiplier entr'eux, et diviser le produit par un des deux facteurs.

24. Lorsque le diviseur n'est pas contenu exactement dans le dividende, la division ne se fait qu'avec un reste; et si l'on veut traiter ce reste par une méthode analogue à celle qu'on emploie dans l'arithmétique, pour réduire en décimales les restes des divisions, on aura un quotient exprimé par une suite infinie, ordonnée par rapport aux puissances croissantes ou décroissantes d'une des lettres du diviseur.

Exemple. On propose de diviser $a^2-b^2+c^2$ par $a-b$.

En suivant les procédés indiqués, on aura pour quotient $a+b+\frac{c^2}{a-b}$; et si l'on veut réduire en série $\frac{c^2}{a-b}$, on écrira

$$\begin{array}{l|l} c^2 & a-b \\ \hline -c^2+\frac{c^2b}{a} & \frac{c^2}{a}+\frac{c^2b}{a^2}+\frac{c^2b^2}{a^3}+\frac{c^2b^3}{a^4}+\ldots\ldots \end{array}$$

1er reste. $\quad +\frac{c^2b}{a}$

$$-\frac{c^2b}{a}+\frac{c^2b^2}{a^2}$$

2e reste. $\quad +\frac{c^2b^2}{a^2}$

... &c.

Ainsi le quotient de $\frac{c^2}{a-b}$ sera exprimé par la

série suivante qui iroit jusqu'à l'infini ....

$$c^2\left\{\frac{1}{a}+\frac{b}{a^2}+\frac{b^2}{a^3}+\frac{b^3}{a^4}+\ldots\right.$$

Si la quantité représentée par b est plus grande que la quantité représentée par a, la valeur des termes va en augmentant; si, au contraire, la quantité représentée par b est plus petite que la quantité représentée par a, la valeur des termes va en diminuant : c'est une conséquence de ce que nous avons dit sur les fractions (Arith. 55).

25. On nomme *séries, ou suites divergentes*, celles dont les termes vont en augmentant de valeur, en sorte que les derniers sont plus grands que les premiers : on nomme *suites convergentes*, celles dont les termes vont en diminuant de valeur. Donnons encore quelques exemples de la manière de réduire une fraction algébrique en série.

Soit $\frac{a}{a-b}$ ou $\frac{a}{-}\left|\begin{array}{l} a-b \\ \hline 1+\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{b^3}{a^3}+\ldots \end{array}\right.$

En suivant les règles de la division, on a pour quotient $1+\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{b^3}{a^3}+\frac{b^4}{a^4}\ldots$

Si $b>a$, la série est divergente; mais si $b<a$, la série est convergente.

Supposons d'abord $a=1$ et $b=10$, la série deviendra $\frac{1}{1-10}=1+\frac{10}{1}+\frac{100}{1}+\frac{1000}{1}+\frac{10000}{1}+\ldots$

Si au contraire $b=1$ et $a=10$, on aura pour quotient $\frac{10}{10-1}=1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{10000}+\ldots$ $=1,1111\ldots$ en décimales.

Il est aisé de voir que la valeur de la première

série est illusoire; car le premier membre est égal à $-\frac{1}{9}$. Or, plus on prend de termes dans le développement en série, plus on s'éloigne de la vraie valeur: donc *les séries divergentes ne peuvent être d'aucune utilité dans les méthodes d'approximation.* Il ne faut pas conclure cependant qu'elles donnent des valeurs fausses; car, en développant en série une fraction algébrique, on a toujours un reste qu'on néglige : or, ce reste ajouté à la somme des termes de la série, donnera toujours la véritable valeur de la fraction. C'est ainsi qu'en ne poussant le développement de la série précédente que jusqu'au quatrième terme, on trouve pour reste $+\frac{b^4}{a^3(a-b)}$:

or $1+\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{b^3}{a^3}+\frac{b^4}{a^3(a-b)}=\frac{a}{a-b}$; ce dont on se convaincra facilement en réduisant toutes ces fractions au même dénominateur.

Dans la seconde série, au contraire, plus on prend de termes, plus on approche de la valeur exacte : car la valeur exacte est $\frac{10}{9}=1+\frac{1}{9}$. Or, le premier terme de la série est 1; le second est $\frac{1}{10}<\frac{1}{9}$, le second et le troisième réunis $\frac{1}{10}+\frac{1}{100}=\frac{11}{100}<\frac{1}{9}$; mais il en approche plus que $\frac{1}{10}$..&c. donc *les séries convergentes peuvent être très-utiles dans les méthodes d'approximation.*

Plus on prend de termes dans le développement de l'exemple ci-dessus, plus on approche de la vraie valeur de la fraction, sans cependant pouvoir jamais l'obtenir, quelque prolongée que soit la série; c'est-à-dire que $\frac{1}{9}$ est la limite de cette série. Nous traiterons ailleurs plus en détail cette théorie des limites.

Des fractions algébriques.

26. Les principes que nous avons posés dans l'arithmétique, pour le calcul des fractions, sont

fondés sur les propriétés générales des nombres, et ne dépendent d'aucun système particulier de numération : ils doivent par conséquent convenir à toutes les fractions exprimées de la manière la plus générale.

On ajoute les fractions algébriques, on les soustrait, on les multiplie, on les divise, on les réduit au même dénominateur et à l'expression la plus simple, en suivant exactement les mêmes procédés que dans l'arithmétique.

Il est donc inutile de répéter ici les raisonnemens que nous avons faits ailleurs : il suffira de donner des exemples. Commençons par les opérations préliminaires, qu'on est souvent dans le cas de faire sur les fractions.

1°. Changer le dénominateur d'une fraction algébrique, sans altérer la valeur de la fraction.

Multipliez ou divisez les deux termes de la fraction par le même nombre (Arith. 58). Ainsi la fraction $\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}$; et réciproquement $\frac{a^2-b^2}{a^3+b^3}$ $=\frac{a-b}{a^2-ab+b^2}$, en divisant les deux termes par $a+b$.

C'est par le même principe qu'on met un entier sous la forme fractionnaire ainsi $p=\frac{mp}{m}$...

$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}$.. $a+\frac{b}{c}=\frac{ac+b}{c}$.. $x+\frac{x^2-2xy+y^2}{x+y}$ $=\frac{2x^2-xy+y^2}{x+y}$... et réciproquement en divisant le numérateur par le dénominateur $\frac{2x^2-xy+y^2}{x+y}$ $=2x-3y+\frac{4y^2}{x+y}$.

2°. Réduire plusieurs fractions au même dénominateur, sans changer leurs valeurs.

Multipliez les deux termes de chaque fraction par le produit des dénominateurs de toutes les autres (Arith. 63). Ainsi les fractions $\frac{m}{n}$, $\frac{p}{q}$, $\frac{r}{s}$ deviennent $\frac{mqs}{nqs}+\frac{nps}{nqs}+\frac{nqr}{nqs}$.

L'opération seroit la même, si les numérateurs ou les dénominateurs, ou tous les deux ensemble étoient des quantités complexes. Comme ces sortes de fractions se présentent fréquemment, il est bon de s'y exercer. Ainsi $\frac{a+b}{m+n}$, $\frac{m-n}{a-b}$, réduites au même dénominateur, donneront $\frac{a^2-b^2}{(m+n)(a-b)}$, $\frac{m^2-n^2}{(m+n)(a-b)}$. On se contente d'indiquer la multiplication des dénominateurs, parce que l'opération est plus simple et plus commode pour avoir son résultat en nombres (18).

3°. Réduire une fraction à sa plus simple expression. *Cherchez le plus grand commun diviseur entre le numérateur et le dénominateur, et divisez ensuite les deux termes de la fraction par ce commun diviseur.*

27. La méthode de trouver le commun diviseur entre deux expressions algébriques, est la même, quant au fond, que celle que l'on emploie dans l'arithmétique; elle est cependant plus embarrassante dans la pratique, si on n'a pas le soin de préparer les termes pour rendre le calcul plus facile; c'est pour cela que nous ajouterons les observations suivantes:

On ne change pas le diviseur commun de deux quantités, en multipliant ou en divisant l'une de ces quantités par un facteur qui n'est pas diviseur de l'autre quantité. Soit pour exemple la fraction $\frac{bc}{bd}$, dont les deux termes ont pour diviseur commun b; en multipliant le numérateur par m, elle deviendra $\frac{bcm}{bd}$. Cette fraction a, à la vérité, changé de valeur; mais le diviseur commun au numérateur et au dénominateur, est resté le même. Ce seroit la même chose si, au lieu de multiplier le numérateur, on multiplioit le dénominateur; mais si la quantité par laquelle on multiplie ou on divise l'une des quantités étoit diviseur de l'autre, ou contenoit un facteur qui fût diviseur de l'autre, alors on changeroit le diviseur commun. Par exemple, qu'on multiplie le numérateur de la fraction $\frac{bc}{bd}$ par ad, on aura $\frac{abcd}{bd}$, dont le diviseur commun est bd, tandis qu'il étoit b avant la multiplication.

Après avoir préparé les termes par la multiplication ou la division, *il faut diviser le plus grand par le plus petit; diviser ensuite le plus petit par le premier reste; le premier reste par le second; etc., etc. jusqu'à ce qu'on trouve un quotient sans reste* (Arith. 62). *Le diviseur qui donnera un quotient exact sans reste, sera le plus grand commun diviseur entre les quantités données.*

28. Mais en algèbre on n'a aucun moyen de juger laquelle des deux quantités est la plus grande; c'est pourquoi on divisera celle qui sera la plus commode, et la plus facile à préparer.

Il n'y a aucune difficulté à trouver le plus grand commun diviseur entre deux monomes. Nous ne

donnerons des exemples que pour les polynomes.

Exemple premier. Trouver le plus grand commun diviseur entre le numérateur et le dénominateur de la fraction $\frac{a^2 - b^2}{a^4 - b^4}$.

Divisez $a^4 - b^4$ par $a^2 - b^2$, le quotient est $a^2 + b^2$, sans reste ; donc $a^2 - b^2$, est le plus grand commun diviseur entre le numérateur et le dénominateur de la fraction proposée. En divisant l'un et l'autre par ce commun diviseur, la fraction se réduit à $\frac{1}{a^2 + b^2}$.

Exemple deuxième. Réduire à l'expression la plus simple la fraction $\frac{12\,x^4 y - 27 y^5}{8x^4 + 12\,x^2 y^2}$.

Après avoir ordonné les termes du numérateur et du dénominateur par rapport à la lettre x, je divise le second par le premier ; mais avant tout, j'observe que le facteur $3y$ est commun à tous les termes du numérateur sans l'être au dénominateur, et le facteur 2 multiplie tous les termes du dénominateur sans multiplier ceux du numérateur, je puis donc faire disparoître ces deux facteurs sans nuire au commun diviseur. Je diviserai ensuite, $4x^4 + 6y^2x^2$ par $4x^4 - 9y^4$. Le quotient est 1, avec un reste $+9y^4 + 6x^2y^2$, je divise $4x^4 - 9y^4$ par $6x^2y^2 + 9y^4$; mais ce premier reste est multiplié par le facteur $3y^2$, qui ne se trouve pas dans le dividende. On le fait disparoître, et l'on divise $4x^4 - 9y^4$ par $2x^2 + 3y^2$. Le quotient est $2x^2 - 3y^2$ sans reste ; donc $2x^2 + 3y^2$ est le plus grand commun diviseur. La fraction proposée pourra donc se réduire à $\frac{3y}{2}\left(\frac{1 - 3y^2}{2x^2}\right)$.

Pour faire sentir les raisons de ce procédé, nous allons appliquer ici d'une manière générale la démonstration que nous en avons donnée en arithmétique d'une manière particulière (Arith. 62).

29. Soient les deux quantités que l'on veut diviser l'une par l'autre, A et B. Supposons que A, divisé par B, donne un quotient p avec un reste C; on aura donc $A=pB+C$. Supposons que B, divisé par C, donne un quotient q avec un reste D, on aura donc $B=qC+D$. Soit enfin C, divisé par $D=r$ sans reste, on aura donc $C=rD$. D sera donc le premier diviseur sans reste; et je dis qu'il sera le plus grand commun diviseur entre A et B.

En effet, puisque le diviseur en question divise A, il divise aussi $pB+C$ qui lui est égal; et puisqu'il divise B séparément, il faut qu'il divise aussi C; mais il ne peut pas diviser B et C sans diviser D, à cause de $B=qC+D$: donc le diviseur de A et B est aussi diviseur de C et D : mais D ne peut être divisé par un nombre plus grand que lui-même; donc le plus grand commun diviseur entre deux nombres, est le reste qui divise exactement celui qui le précède.

De l'addition des fractions littérales.

30. Si l'on veut se contenter d'indiquer l'addition de plusieurs fractions littérales, on n'a pas besoin de les réduire au même dénominateur; mais si l'on veut effectuer le calcul autant que cela est possible, il faut les réduire au même dénominateur, en suivant le même procédé qu'en arithmétique. Ainsi, pour ajouter les fractions $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{m-n}{p+q}$, on peut se contenter de les laisser ainsi écrites les unes à côté des autres avec leurs signes, ou les réduire au même

dénominateur, et prendre la somme des numérateurs. L'on aura

$$\frac{adp+adq+bcp+bcq+bdm-bdn}{bdp+bdq}.$$

De la soustraction des fractions littérales.

31. La soustraction des fractions littérales se fait en changeant les signes de la fraction qui doit être soustraite, et l'écrivant ainsi à côté de la première, on les réduit ensuite au même dénominateur, et l'on fait la réduction, s'il y a lieu. Ainsi, pour retrancher $\frac{a-b}{c}$ de $\frac{m}{n}$, on écrit $\frac{m}{n}+\frac{b-a}{c}$.... pour retrancher $\frac{xy-x^2}{y^2}$ de $\frac{x}{y}$, on écrit $\frac{x}{y}+\frac{x^2-xy}{y^2}=\frac{x^2}{y^2}$.... Pour soustraire $-\frac{a}{b}$ de $\frac{x}{y}$, on écrit $\frac{x}{y}+\frac{a}{b}$ (12) $=\frac{bx+ay}{by}$.

De la multiplication des fractions littérales.

32. Pour multiplier un entier par une fraction, ou une fraction par un entier, on multiplie le numérateur de la fraction par l'entier, et laisse le dénominateur tel qu'il est. Ainsi $4am\times\frac{2ab}{cd}=\frac{8a^2bm}{cd}$... $(5ab+bc)\times\frac{m}{n}=\frac{5abm+bcm}{n}$... $\frac{2ax-x^2}{y}\times(x-y)=\frac{2ax^2-x^3-2axy+x^2y}{y}$.

Si le multiplicande et le multiplicateur sont tous

les deux fractionnaires, on multipliera numérateur par numérateur, et dénominateur par dénominateur. Ainsi $\frac{3a^2b}{5c^2d}\times\frac{4a^3b}{6c^3d}=\frac{12a^5b^2}{30c^5d^2}$ ..... $\frac{x+y}{m+n}\times\frac{x-y}{m-n}=\frac{x^2-y^2}{m^2-n^2}$.

De la division des fractions littérales.

33. La division d'une fraction par un entier, consiste à multiplier le dénominateur de la fraction par l'entier, et à laisser le numérateur tel qu'il est. Ainsi la division de $\frac{a}{b}$ par c donne $\frac{a}{bc}$ ... le quotient $\frac{4a^2b}{5c^3}$ par $-d=-\frac{4a^2b}{5c^3d}$.

La division d'un entier par une fraction se fait en multipliant l'entier par le dénominateur; mais après la multiplication, on met le produit au numérateur, et le premier numérateur passe au dénominateur. Ainsi a divisé par $\frac{b}{c}=\frac{ac}{b}$ ... a^2b divisé par $\frac{a+b}{c+d}=\frac{a^2bc+a^2bd}{a+b}$.

Enfin, la division d'une fraction par une autre fraction, se fait en multipliant le numérateur de la fraction dividende, par le dénominateur de la fraction diviseur, et le dénominateur de la première par le numérateur de la seconde : le premier produit sera le numérateur de la fraction quotient; et le second en sera le dénominateur. Ainsi $\frac{m}{n}$ divisé par $\frac{p}{q}=\frac{mq}{np}$ ... $\frac{a^2-b^2}{x^2-y^2}$ divisé par $\frac{x^2+y^2}{a^2+b^2}=\frac{a^4-b^4}{x^4-y^4}$.

Il paroîtra peut-être plus commode de renverser la fraction diviseur, comme nous l'avons observé en arithmétique, et de multiplier ensuite numérateur par numérateur, et dénominateur par dénominateur. Par exemple, dans la fraction ci-dessus, je renverse la fraction $\frac{p}{q}$ en écrivant $\frac{q}{p}$; je multiplie ensuite m par q, et n par p.

Pour renfermer les trois cas dans une règle générale, nous remarquerons que l'on peut mettre l'entier sous la forme d'une fraction, en lui donnant l'unité pour dénominateur; pour lors les trois cas se réduiront au dernier. Ainsi 1°. $\frac{a}{b}$ divisé par c se réduit à $\frac{a}{b}$ divisé par $\frac{c}{1}=\frac{1\times a}{bc}$... 2°. c divisé par $\frac{a}{b}=\frac{c}{1}$ divisé par $\frac{a}{b}=\frac{cb}{1\times a}$.... &c.

Des fractions continues.

34. Ce que nous allons dire sur les fractions continues est une extension et une généralité de ce que nous en avons dit en arithmétique. Il sera bon et utile de relire attentivement cet article, avant de passer à la lecture de celui-ci.

On donne le nom de fraction continue à une expression de la forme $a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{f}+\text{\&c.}\ldots}}}$

Et si on suppose que $a=1$, $b=2$, $c=4$, $d=5$, on aura le cas particulier que nous avons traité en arithmétique (Arith. 72). La quantité a représente un entier joint à la fraction, ou ce qui revient au

même, l'expression ci-dessus est le développement d'une fraction representée par $\frac{A}{B}$, dans laquelle le numérateur est plus grand que le dénominateur.

Si on s'arrête au premier terme a, on aura une première approximation de la fraction $\frac{A}{B}$ plus petite que la véritable valeur de la fraction : si on pousse l'approximation jusqu'au second terme b, on aura l'expression $a+\frac{1}{b}$; en réduisant au même dénominateur, la valeur de cette expression sera $\frac{ab+1}{b}$ plus grande que la véritable valeur de $\frac{A}{B}$. Si on s'arrête au troisième terme, on aura $a+\frac{1}{b+\frac{1}{c}}$, dont la réduction donne $\frac{abc+a+c}{bc+1}$ plus petite que la véritable valeur de $\frac{A}{B}$. Si on pousse jusqu'au quatrième terme, on aura

$$a+\frac{1}{b+\frac{1}{c+\frac{1}{d}}}=\frac{abcd+ad+cd+ab+1}{bcd+b+d}$$

plus grande que la véritable valeur de $\frac{A}{B}$. Ainsi la fraction proposée $\frac{A}{B}$ sera alternativement plus grande et plus petite que les fractions suivantes $\frac{a}{1}$, $\frac{ab+1}{b}$, $\frac{abc+a+c}{bc+1}$, $\frac{abcd+ad+cd+ab+1}{bcd+b+d}$..... de

manière cependant que chaque fraction approche plus de la véritable valeur que la précédente.

35. Si l'on cherchoit le plus grand commun diviseur entre A et B, selon la méthode prescrite, on trouveroit que les nombres représentés par a, b, c, d, f, sont les quotiens respectifs, que l'on obtient en divisant successivement le premier nombre par le second, le second par le premier reste, le premier reste par le second. . &c. Or, ces quotiens une fois déterminés, il est facile de former les fractions précédentes, sans passer par la fraction continue.

On voit en effet que le premier quotient divisé par l'unité, donne la première fraction $\frac{a}{1}$. Ensuite, multipliant le numérateur et le dénominateur de cette fraction par le second quotient, et ajoutant l'unité au numérateur, on aura la seconde fraction $\frac{ab+1}{b}$. Multipliant de même le numérateur et le dénominateur de celle-ci par le troisième quotient, ajoutant à son numérateur celui de la fraction précédente, et à son dénominateur le dénominateur de la même fraction, on aura la troisième fraction $\frac{abc+c+a}{bc+1}$. On suivra le même procédé pour former les fractions suivantes, en sorte que *le numérateur de chaque fraction sera égal au numérateur de la fraction précédente multiplié par le quotient correspondant, et augmenté du numérateur de la fraction qui précède celle-ci, et son dénominateur sera égal au dénominateur de la fraction précédente multiplié par le quotient correspondant, et augmenté du dénominateur de la fraction qui précède celle-ci.*

Si nous représentons une de ces fractions par $\frac{X}{Y}$, celle qui la précède par $\frac{T}{V}$, celle qui précède celle-ci par $\frac{R}{S}$, et le quotient correspondant par q, on pourra traduire de la manière suivante la loi que nous venons d'assigner pour la formation des fractions partielles qui donnent les valeurs approchées de $\frac{A}{B}$... $X=qT+R$ et $Y=qV+S$.

Quiconque aura une idée exacte des quantités représentées par chacune de ces lettres, trouvera dans cette formule l'expression abrégée des loix constantes que suivent les numérateurs et les dénominateurs des fractions dont nous parlons.

36. L'expression générale des numérateurs et des dénominateurs des fractions partielles, nous présente un exemple des formules algébriques, et de l'avantage de l'algèbre sur l'arithmétique. En effet, toutes les propriétés qu'on découvre dans la grandeur considérée de la manière la plus générale, et indépendamment de tout système particulier, doit se trouver vrai dans tous les cas particuliers renfermés dans le cas général. Pour en faire une application, je suppose que la fraction $\frac{A}{B}=\frac{68}{47}$; en la réduisant en fraction continue, on a $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5}}}\ldots\ldots$

Si on cherche le plus grand commun diviseur entre 68 et 47, on trouve les quotiens successifs 1, 2, 4, 5. En se servant de ces quotiens et de la formule gé-

nérale, on forme les fractions suivantes $\frac{1}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{13}{9}$, $\frac{68}{47}$, où l'on voit, par exemple, que la formule générale $X=qT+R$ représente 13, lorsque $q=4$, $T=3$ et $R=1$ et de même la formule générale $Y=qV+S$ représente 9, lorsque $V=2$, et $S=1$.

Soit encore $\frac{A}{B}=\frac{2866}{835}$; en cherchant le plus grand commun diviseur entre le numérateur et le dénominateur, on trouvera les quotiens successifs, 3, 2, 3, 5, 7, 3, et en prenant la formule générale, on formera les fractions successives $\frac{3}{1}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{24}{7}$, $\frac{127}{37}$, $\frac{913}{266}$, $\frac{2866}{835}$; et l'on trouvera, par exemple, que $X=913$ lorsque $q=7$, $T=127$, $R=24$, et $Y=266$ lorsque $V=37$ et $S=7$.

37. Voyons encore quelqu'autre propriété des fractions continues. Si on cherche la différence de chaque fraction à celle qui la précède, on trouvera, pour la première et la seconde, $\frac{ab+1}{b}-\frac{a}{1}=\frac{1}{b}$; pour la seconde et la troisième, $\frac{abc+a+c}{bc+1}-\frac{(ab+1)}{b}=-\frac{1}{b(bc+1)}$; pour la troisième et la quatrième, $\frac{abcd+ad+ab+cd+1}{bcd+b+d}-\frac{(abc+a+c)}{bc+1}=\frac{1}{(bc+1)(bcd+b+d)}$; et comme la loi que suivent ces différences ne dépend d'aucune valeur particulière des lettres a, b, c, d, il s'ensuit qu'elle est générale. Nous pouvons donc conclure que, si on cherche la différence d'une fraction à la voisine, on trouve une fraction dont le numérateur est l'unité, et le dénominateur le produit des deux dénominateurs des fractions qu'on compare,

pare : de sorte qu'en employant cette suite de différences, on peut encore exprimer d'une manière fort simple les fractions dont il s'agit, par une suite d'autres fractions, dont les numérateurs soient tous l'unité, et les dénominateurs soient successivement le produit de deux dénominateurs voisins. Ainsi, au lieu de représenter les approximations successives de $\frac{A}{B}$ par les fractions ci-dessus (36), on les représentera par la série suivante :

$$\frac{A}{B}=a+\frac{1}{1.b}-\frac{1}{b(bc+1)}+\frac{1}{(bc+1)(bcd+b+d)}$$
$$-\frac{1}{(bcd+b+d)(bcdf+bc+bf+df+1)}+\ldots$$

en supposant $\frac{A}{B}=\frac{2866}{835}$ comme ci-dessus, la série devient $3+\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.7}+\frac{1}{7.37}-\frac{1}{37.266}$ $+\frac{1}{266.835}$.

Le premier terme est, comme l'on voit, la première fraction ; le premier et le second réunis donnent la seconde fraction $\frac{7}{2}$; la somme du premier, du second et du troisième donnent la troisième fraction $\frac{24}{7}$, et ainsi des autres ; en sorte que toute la série sera équivalente à la fraction totale.

38. La formation des termes de la série précédente nous apprend que, si on représente les fractions successives qui donnent par approximation les valeurs de la fraction continue par $\frac{a}{a'}, \frac{b}{b'}, \frac{c}{c'}, \frac{d}{d'}, \ldots$ on aura généralement $ab'-a'b=-1 \ldots bc'-b'c$ $=1 \ldots cd'-c'd=-1 \ldots$ &c.

Si l'on vouloit chercher la racine de 2 par le moyen des fractions continues, on auroit la fraction suivante continuée à l'infini (Arithmét. 73) :

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2\ldots\ldots}}}}$$

Lorsque les dénominateurs reviennent toujours dans le même ordre à l'infini, la fraction continue est dite périodique.

Les propriétés générales des fractions continues que nous venons de parcourir, n'auroient pas pu être déduites de l'arithmétique, parce qu'il eût été trop difficile de démêler dans une expression arithmétique ce qu'elle eût renfermé de général, d'avec ce qui dépend de chaque cas particulier du systême de numération adopté, et des signes particuliers dont on se sert.

Nous ne suivrons pas plus loin ce premier exemple de la manière de procéder en algèbre pour découvrir des vérités générales. Nous ne pourrions même le faire avec fruit, sans avoir donné plus particulièrement les règles de l'analyse.

De la formation des puissances et de l'extraction des racines.

39. Elever une quantité à une puissance, c'est multiplier cette quantité par elle-même, autant de fois, moins une, que cela est indiqué par le degré de la puissance auquel on veut élever la quantité (Arith. 109). Ainsi, élever la quantité représentée par b à la troisième puissance, c'est multiplier b par lui-même deux fois ; le produit sera donc $bbb=b^3$.

Extraire la racine d'une puissance proposée, c'est chercher la quantité qui, multipliée par elle-même un certain nombre de fois, a produit la puissance.

Ainsi b est la racine troisième de b^3, parce que b, multiplié par lui-même deux fois, a donné b^3.

Les règles à suivre pour la formation des puissances et l'extraction des racines, dépendent de celles que nous avons déjà données pour la multiplication et la division. Nous allons en faire l'application, 1°. à l'élévation aux puissances et à l'extraction des racines des monomes; 2°. à ces mêmes opérations sur des polynomes.

De l'élévation aux puissances et de l'extraction des racines des monomes.

40. Pour élever $+b$ à son quarré, il faut multiplier $+b$ par $+b$; le produit est $+b^2$.

De même, pour élever $-b$ à son quarré, il faut multiplier $-b$ par $-b$; le produit est encore $+b^2$: un quarré négatif est donc une quantité absurde ou imaginaire.

Le cube, ou troisième puissance de $+b$, est $+b$ multiplié par lui-même deux fois, ou $+b^3$, et celui de $-b$ est $-b\times-b\times-b=-b^3$. Pareillement, pour avoir la quatrième puissance de $+b$, il faudra multiplier le cube déjà obtenu par $+b$, ce qui donnera $+b^4$; et pour avoir la quatrième puissance de $-b$, il faudra multiplier $-b^3$ par $-b$, ce qui donnera $+b^4$.

Sans pousser plus loin l'analogie, on doit voir que toutes les puissances paires sont toujours positives, soit que la racine ait le signe $+$ ou le signe $-$; et toutes les puissances impaires ont toujours le même signe que la racine.

Si le monome qu'on veut élever à une puissance a un coefficient numérique, *il faudra multiplier ce coefficient par lui-même; c'est-à-dire qu'il faudra l'élever à la puissance indiquée selon les règles prescrites dans l'arithmétique.*

Enfin, si les différentes lettres composant le monome ont des exposans, on multipliera l'exposant de chaque lettre par l'exposant de la puissance. En effet, pour élever b^2, par exemple, au cube, on a $b^2 \times b^2 \times b^2 = b^{2+2+2} = b^{2\times 3} = b^6$, où l'on voit que l'exposant 2 de la racine b^2 est multiplié par 3 exposant du cube. Par la même raison, $b^2c^3d^4$ élevé à la cinquième puissance, donnera $b^{2\times 5}c^{3\times 5}d^{4\times 5} = b^{10}c^{15}d^{20}$. Ces règles suffisent pour élever un monome à une puissance quelconque, comme on le voit dans les exemples suivans :

Le quarré de $+ab$ est $+a^2b^2$; celui de $-ab$ est aussi $+a^2b^2$.

Le quarré de $+3x^2y^3z$ est $+9x^4y^6z^2$; celui de $-5ax^2y^3$ est $+25a^2x^4y^6$.

Le cube de $+3ab^2m$ est $+27a^3b^6m^3$; celui de $-2ab^2x^3$ est $-8a^3b^6x^9$.

La quatrième puissance de $+2b^2c^3d^4$ est $+16b^8c^{12}d^{16}$; cellc de $-3p^2qx^3$ est $+81p^8q^4x^{12}$.

La cinquième puissance de $+3a^2y$ est $243a^{10}y^5$; celle de $-2ax^2$ est $-32a^5x^{10}$.

41. Pour donner plus de généralité au calcul algébrique, on peut se proposer d'élever une quantité quelconque représentée par a, à une puissance indéterminée représentée par m. Dans ce cas, m sera l'exposant de cette puissance ; et cette élévation s'effectuera en multipliant l'exposant de a, qui est 1, par m, ce qui donnera a^m... Par la même raison, $b^p c^r$ élevé à la puissance n, donnera $b^{np} c^{nr}$.

42. L'extraction des racines étant l'opération inverse de la formation des puissances, il est clair que pour avoir la racine d'un monome, il faudra suivre des règles inverses à celles des puissances. On observera donc,

1°. Que le signe d'une puissance paire étant toujours positif, quel que soit celui de la racine, lorsqu'on voudra repasser d'une puissance paire à sa racine, il faudra lui donner le double signe $\pm$, parce que, généralement parlant, rien ne détermine si la racine doit être positive ou négative : quant aux signes des racines impaires, ils seront toujours les mêmes que ceux des puissances.

2°. Les coefficiens étant élevés aux puissances, selon les principes du calcul numérique, pour en extraire les racines, il faudra suivre les règles prescrites en arithmétique.

3°. L'exposant de chaque lettre étant multiplié par celui de la puissance, pour extraire la racine, il faudra diviser l'exposant de chaque lettre par celui de la racine.

Appliquons ces règles à quelques exemples.

La racine quarrée de $+a^2$ est $\pm a$... celle de $+9a^6b^4$ est $\pm 3a^3b^2$.

La racine cubique de $+a^3$ est $+a$... celle de $-a^3$ est $-a$.

La racine cubique de $+125x^9y^6$ est $+5x^3y^2$.

La racine quatrième de $+b^4$ est $\pm b$... celle de $16a^4x^{12}$ est $\pm 2ax^3$.

La racine du degré n de la quantité $a^r b^s$, sera indiquée par $a^{\frac{r}{n}} b^{\frac{s}{n}}$. En effet, pour élever cette quantité à la puissance n, il faudra multiplier l'exposant de chaque lettre par n, ce qui reproduira $a^r b^s$.

Nous conclurons donc des règles et des exemples que nous venons d'établir, que, si l'exposant de chaque lettre n'est pas divisible par celui de la racine qu'on se propose d'extraire, ces exposans seront sous la forme d'une fraction dans la racine.

Par exemple, la racine troisième de a^2 sera désignée par $a^{\frac{2}{3}}$. La racine cinquième de b^3c sera $b^{\frac{3}{5}}c^{\frac{1}{5}}$.

La racine du degré n de $b^r c^s$ sera indiquée par $b^{\frac{r}{n}} c^{\frac{s}{n}}$.

Un exposant fractionnaire désigne donc une racine à extraire. Pour élever une quantité fractionnaire à une puissance quelconque, il faut élever à cette puissance le numérateur et le dénominateur. Pour extraire une racine quelconque d'une quantité fractionnaire, il faudra extraire la racine demandée du numérateur et du dénominateur.

Ainsi la troisième puissance de $\frac{3a^2x}{4by^3}$ est $\frac{27a^6x^3}{64b^3y^9}$.

La puissance n de $\frac{x^r}{y^s}$ est $\frac{x^{rn}}{y^{sn}}$.

La racine seconde de $\frac{25a^4x^2}{9b^2y^6}$ est $\pm\frac{5a^2x}{3by^3}$.

La racine n de $\frac{bx^r}{cy^s}$ est $\frac{b^{\frac{1}{n}}x^{\frac{r}{n}}}{c^{\frac{1}{n}}y^{\frac{s}{n}}}$.

43. *Remarque.* Il n'est pas inutile d'observer ici comment le langage algébrique se généralise et se simplifie, à mesure que la considération des propriétés des nombres étend successivement nos idées. Les premiers auteurs de l'algèbre ne considéroient dans leurs calculs que des quantités connues et déterminées, et représentoient l'inconnue seulement par une lettre. Viette, mathématicien français, introduisit dans l'algèbre les lettres de l'alphabet, pour représenter toutes sortes de quantités connues et inconnues, et par-là il donna aux formules algébriques une généralité qui est leur plus précieux avantage. De même, avant Descartes, pour exprimer, par exemple, la huitième puissance d'une quantité représensée par b, il falloit écrire b à côté de lui-même

sept fois. A cette répétition fastidieuse de la même lettre, il substitua l'usage des exposans, et procura ainsi à l'algèbre l'avantage de la simplicité, de la netteté et de la généralité ; puisqu'au moyen des exposans indéterminés on peut indiquer la puissance indéterminée d'une quantité qui est elle-même indéterminée.

Les exposans des lettres peuvent être positifs, négatifs, entiers, fractionnaires.

Un exposant positif et entier désigne une puissance de la quantité (14) : ainsi b^m désigne que la quantité b doit être élevée à la puissance désignée par m.

Un exposant entier et négatif désigne le quotient d'une quantité divisée par la puissance indiquée par l'exposant (40). Ainsi $ab^{-m}=\frac{a}{b^m}$, signifie que la quantité représentée par a doit être divisée par la puissance m de la quantité b.

Un exposant positif et fractionnaire désigne une puissance par le numérateur de l'exposant, et une racine par le dénominateur du même exposant. Ainsi $p^{\frac{m}{n}}$ désigne que la quantité représentée par p doit être élevée d'abord à la puissance marquée par m, et qu'il faut ensuite extraire de cette puissance la racine n.

Enfin une lettre, affectée d'un exposant négatif et fractionnaire, porte à l'esprit la même idée, que si cette lettre étoit au dénominateur avec le même exposant positif (20). Ainsi $ab^{\frac{-m}{n}}=\frac{a}{b^{\frac{m}{n}}}$.

44. Toute puissance paire, telle que le quarré, par exemple, qui est précédée du signe négatif, n'a

point de racine possible, ou, ce qui est la même chose, sa racine est *imaginaire.* Quoique ces racines ne portent à l'esprit l'idée d'aucune quantité réelle, elles sont soumises néanmoins aux mêmes règles de calcul que les quantités réelles, parce que souvent ce n'est qu'à la fin du calcul qu'on découvre l'existence de pareilles quantités, introduites dans le calcul par des conditions contradictoires, et impossibles à remplir.

Des quantités radicales.

45. Quand on ne veut qu'indiquer une extraction de racines, on se sert du caractère $\sqrt{\ }$, qu'on nomme signe radical, et sous lequel on écrit la quantité dont on veut extraire la racine.

Ce radical, par lui-même, n'indique que la racine quarrée; mais pour lui faire marquer une racine troisième, ou quatrième, on met sur le radical le chiffre 3 ou 4, qu'on nomme l'exposant du radical. Ainsi $\sqrt{ab}$ indique la racine quarrée de ab, et $\sqrt[3]{cx}$, indique la racine cubique de cx.

Si la quantité dont on veut extraire la racine, est composée de plusieurs termes, on les renferme tous dans deux parenthèses, en mettant au-devant le signe radical. Ainsi $\sqrt{\ }(a^2 + 2bc)$ indique la racine quarrée de $a^2 + 2bc$.

Les quantités radicales, qu'on nomme aussi radicaux, sont d'un fréquent usage dans l'algèbre, parce qu'il est rare qu'on puisse effectuer l'extraction des racines de quantités exprimées d'une manière générale. Il est donc nécessaire d'avoir un signe particulier pour les indiquer.

Les radicaux sont susceptibles des mêmes opérations que les autres expressions algébriques; c'est-à-

dire qu'on les ajoute, on les soustrait, on les multiplie, on les divise, on les élève à des puissances, on en extrait les racines; mais, avant tout, il est bon de les préparer par des opérations préliminaires.

Toutes les préparations qu'on peut faire sur les radicaux sont fondées sur ce principe, qu'on ne change pas la valeur d'un radical en multipliant ou en divisant par le même nombre l'exposant du radical, et celui de chaque lettre sous le signe; car cela se réduit à faire en même temps une élévation de puissance et une extraction de racine semblables sur la même quantité. Ainsi $a = \sqrt{a^2} = \sqrt[3]{a^3} = \sqrt[m]{a^m} \ldots$ Par la même raison $\sqrt{ab} = \sqrt[4]{a^2b^2} = \sqrt[6]{a^3b^3} = \sqrt[2n]{a^nb^n}$.

46. La première opération consiste à faire sortir hors du radical un facteur qui est sous le radical, ou à faire entrer sous le radical un facteur qui est hors du radical. Dans le premier cas, il faut que la quantité sous le radical soit le produit de deux facteurs, dont un est élevé à la puissance désignée par l'exposant du radical. On prend la racine de ce facteur, et on l'écrit devant le radical. Ainsi $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b} \ldots$ $\sqrt[3]{b^3c^2} = b\sqrt[3]{c^2} \ldots$ $\sqrt{4ab} = 2\sqrt{ab}$.

En effet, la racine quarrée de a^2 est a: donc multiplier la racine quarrée de b par la racine quarrée de a^2 ou par a, c'est la même chose. Il en est de même des autres exemples.

Le second cas est l'inverse du premier, et consiste à élever le coefficient du radical à la puissance indiquée par l'exposant du radical, et multiplier ensuite tous les termes qui sont sous le radical, par cette puissance du coefficient. Ainsi $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b} \ldots$,

$b\sqrt{(b+c)} = \sqrt{b^3+b^2c}$. La raison de ce procédé est facile à saisir, d'après ce que nous avons dit pour le premier cas.

47. La seconde préparation consiste à réduire deux ou plusieurs radicaux au même exposant.

Soient les deux radicaux $\sqrt[3]{a^2b}$ et $\sqrt{bc^2}$. Pour les réduire au même exposant, j'élève au quarré la quantité sous le signe du premier radical, ou, ce qui est la même chose, je multiplie par 2 l'exposant de chaque lettre (40); j'extrais ensuite la racine quarrée de cette même quantité, ou, ce qui revient au même, je multiplie l'exposant du radical par 2. Le premier radical sera donc $\sqrt[6]{a^4b^2}$.

Je multiplie en second lieu l'exposant de chaque lettre du second radical par 3; je multiplie aussi par 3 l'exposant du radical (45), et il deviendra $\sqrt[6]{b^3c^6}$.

Il est évident que les radicaux n'ont point changé de valeur, parce que les opérations qu'on a faites sur chacun d'eux, se détruisent réciproquement; ainsi pour réduire au même exposant les deux radicaux $\sqrt[m]{b^rc^s}$ et $\sqrt[n]{x^ty^t}$; on écrira $\sqrt[m.n]{b^{nr}c^{ns}}$, $\sqrt[m.n]{x^{lm}y^{mt}}$.

Ces mêmes réductions ont lieu sur les radicaux exprimés en nombres. Soit par exemple $\sqrt{50}$, qu'il s'agit de réduire à une expression plus simple; on décomposera ce nombre en deux facteurs, tel qu'il y en ait un qui soit un quarré; on extraira la racine de ce facteur, et on l'écrira hors

du radical. Ainsi $50=2\times 25$; donc $\sqrt{50}=5\sqrt{2}$. Par la même raison $\sqrt[3]{48}=\sqrt[3]{6\times 8}=2\sqrt[3]{6}$.

De l'addition et soustraction des quantités radicales.

48. L'addition et la soustraction des radicaux se fait comme celle des autres quantités algébriques; c'est-à-dire qu'on les ajoute, en les écrivant tels qu'ils sont avec leurs signes, à côté des autres quantités algébriques; et pour les soustraire, on change les signes de ceux qui doivent être soustraits.

Exemple. Pour l'addition on propose d'ajouter ensemble les polynomes suivans :

$$8a^2b-5bc^2+3b\sqrt{c^2d}$$
$$5bc^2-3a^2b+2b\sqrt{c^2d}$$
$$4ab^2+3m^2n-2c\sqrt{g^3f}$$

Somme réduite, $5a^2b+4ab^2+3m^2n+5b\sqrt{c^2d}-2c\sqrt{g^3f}$.

Exemple pour la soustraction.

De ..... $3a^2e-4a^2m+2m\sqrt{cd}-2\sqrt{bx}$
soustraire. $2a^2e-c^2m-3m\sqrt{cd}-3\sqrt{cy}$

reste.... $a^2e-3e^2m+5m\sqrt{cd}-2\sqrt{bx}+3\sqrt{cy}$

De la multiplication des quantités radicales.

49. Si un des facteurs de la multiplication est une quantité radicale, et l'autre une quantité rationnelle, on multipliera le coëfficient du radical par la quantité rationnelle, en ayant égard aux signes, conformément aux règles prescrites, et on laissera la quan-

tité sous le signe, telle qu'elle est. Ainsi $3x \times 2\sqrt{ac} = 6x\sqrt{ac} = \sqrt{36acx^2}$ (46)......$-5m \times -3n\sqrt[3]{b^2c} = +15mn\sqrt[3]{b^2c}$.

Remarquez qu'on nomme coefficient du radical, la quantité littérale ou numérique qui se trouve devant le radical; et lorsqu'il n'a pas de coefficient devant lui, il est censé avoir l'unité.

Supposons en second lieu, que les deux facteurs de la multiplication soient des quantités radicales. Il faut distinguer deux cas; le premier, lorsque les deux radicaux sont de même espèce, c'est-à-dire, tous les deux du même degré. Dans ce cas, après avoir multiplié les coefficiens des deux radicaux l'un par l'autre, on écrira le signe radical, et on multipliera les grandeurs sous le signe, l'une par l'autre. Ainsi $3\sqrt{a} \times 2\sqrt{b} = 6\sqrt{ab}$........ $2b\sqrt{ac} \times 4c\sqrt{ab} = 8bc\sqrt{a^2bc}$...$-5m\sqrt[3]{a^2n} \times 2n\sqrt[3]{bm^2} = -10mn\sqrt[3]{a^2bm^2n} = -10\sqrt[3]{a^2bm^5n^4}$. (46).

La raison de ces multiplications est évidente. 1°. Il n'y a aucune difficulté pour le signe et pour les coefficiens du radical; ils doivent être soumis, par leur nature, à la même loi que les quantités rationnelles; 2°. les quantités radicales doivent être multipliées entr'elles, et rester soumises au radical: car le produit de deux radicaux de même espèce, ne peut qu'être égal à la racine pareille du produit des deux quantités. Ainsi $\sqrt{a^2} \times \sqrt{b^2}$, doit être nécessairement $\sqrt{a^2b^2}$. En effet, $\sqrt{a^2} = a$...... $\sqrt{b^2} = b$. Donc $\sqrt{a^2} \times \sqrt{b^2} = ab$. Mais $\sqrt{a^2b^2}$ est aussi ab (42). Donc $\sqrt{a^2b^2}$ est le véritable produit de $\sqrt{a^2} \times \sqrt{b^2}$.

Le second cas a lieu lorsque les radicaux ne sont pas de même espèce. Il faut alors commencer par les ramener à la même espèce (47); car le produit ne peut être affecté que d'un radical : or, il n'y auroit pas plus de raison de lui donner celui du multiplicande que celui du multiplicateur; on ne pourroit pas non plus lui en donner un composé, car chaque facteur sous le radical étant soumis au signe radical, auroit changé de valeur si le radical du produit étoit différent de celui des facteurs. Ainsi, pour multiplier $\sqrt[3]{a^2b}$ par $\sqrt{bc}$, on commencera par écrire $\sqrt[6]{a^4b^2} \times \sqrt[6]{b^3c^3} = \sqrt[6]{a^4b^5c^3} \ldots\ldots 3b\sqrt[3]{bx^2} \times 2c\sqrt[4]{b^3y} = 3b\sqrt[12]{b^4x^8} \times 2c\sqrt[12]{b^9y^3} = 6bc\sqrt[12]{b^{13}x^8y^3} \ldots$ $\sqrt[m]{a^rb^s} \times \sqrt[n]{c^kd^t} = \sqrt[mn]{a^{nr}b^{ns}} \times \sqrt[mn]{c^{mk}d^{mt}} = \sqrt[mn]{a^{nr}b^{ns}c^{mk}d^{mt}}$.

De la division des quantités radicales.

50. Pour procéder avec ordre, nous distinguerons trois cas. Dans le premier, il s'agit de diviser une quantité rationnelle par une quantité radicale; dans le second, on divise une quantité radicale par une quantité rationnelle; dans le troisième, le dividende et le diviseur sont tous les deux des quantités radicales.

Dans le premier et le second cas, la division ne peut que s'indiquer lorsque le radical n'a d'autre coefficient que l'unité; mais si le radical est précédé d'un coefficient, on divisera, dans le premier cas, la quantité rationnelle par le coefficient du radical, et dans le second, le coefficient du radical par la quantité rationnelle, en suivant les règles prescrites; et

on écrira la quantité radicale telle qu'elle est au numérateur ou au dénominateur. Ainsi, dans le premier cas $4ab$ divisé par $\sqrt{bc} = \frac{4ab}{\sqrt{bc}}$.... $8abc$ divisé par $2ac\sqrt{bx} = \frac{4b}{\sqrt{bx}}$..... $5a^3b^2y$ divisé par $3a^2by^2\sqrt[3]{3ax^2} = \frac{5ab}{3y\sqrt[3]{3ax^2}}$.

Dans le second cas, $\sqrt{bm}$ divisé par $a = \frac{\sqrt{bm}}{a}$... $8ab^2\sqrt[3]{b^2c}$ divisé par $4ab = 2b\sqrt[3]{b^2c}$....... $5a^{mn}\sqrt{b^rc^s}$ divisé par $3a^3b = \frac{5a^{mn-3}\sqrt[m]{b^rc^s}}{3b}$.

Il n'est pas inutile d'observer qu'en faisant passer sous le radical un facteur qui se trouve devant le radical, ou réciproquement, la division peut souvent s'effectuer, ou du moins se simplifier. Par exemple, $4a\sqrt{b^2c}$ divisé par $2ab = \frac{4a\sqrt{b^2c}}{2ab} = 2\sqrt{c}$... $\frac{3b}{\sqrt{9b^2c}} = \frac{1}{\sqrt{c}}$.

Dans le troisième cas, si le dividende et le diviseur n'étoient pas des quantités radicales de même espèce, il faudroit commencer par les y réduire. On divisera ensuite le coefficient du dividende par celui du diviseur; on écrira le radical commun au dividende et au diviseur; et à la suite du signe radical, on écrira le quotient des quantités sous le signe, divisées les unes par les autres. Ainsi $4a\sqrt{ab}$ divisé

par $2a\sqrt{b} = 2\sqrt{a}$... $6b^2c\sqrt{cd}$ divisé par $3bc\sqrt{ad}$ $= 2b\sqrt{\frac{c}{a}}$.... $5x^2y\sqrt{abc}$ divisé par $3ax\sqrt{bcd}$ $= \frac{5xy}{3a}\sqrt{\frac{a}{d}} = \frac{5xy}{3}\sqrt{\frac{1}{ad}}$. (46).

Par la même raison $-\sqrt[3]{ab^2}$ divisé $+\sqrt{ab}$, donne en réduisant les radicaux au même exposant, $-\sqrt[6]{a^2b^4}$ à diviser par $\sqrt[6]{a^3b^3} = -\sqrt[6]{\frac{b}{a}}$......

$8ax\sqrt[r]{pq}$ à diviser par $4ay\sqrt[s]{ku} = \frac{2x}{y}\sqrt[rs]{\frac{p^sq^s}{k^ru^r}}$.

De l'élévation aux puissances, et de l'extraction des racines des quantités radicales.

51. Pour élever un radical à une puissance quelconque, il faut commencer par élever le coefficient du radical à la puissance demandée; on écrit ensuite le radical, et l'on multiplie l'exposant de chaque lettre sous le signe, par l'exposant de la puissance désignée. Ainsi le quarré de $\sqrt{ax} = \sqrt{a^2x^2} = ax$..

Le quarré $3\sqrt[3]{bc} = 9\sqrt[3]{b^2c^2}$....

Le quarré de $-8\sqrt[5]{b^3y^4} = +64\sqrt[5]{b^6y^8}$...
Le cube de $-3\sqrt{a^4b^5} = -27\sqrt{a^{12}b^{15}}$...

La quatrième puissance de $2\sqrt[3]{x^5y^7} = 16\sqrt[3]{x^{20}y^{28}}$.

Celle de $-3\sqrt[3]{b^3c^9} = +81\sqrt[3]{b^{12}c^{36}}$.

La puissance de l'ordre désigné par n de $\sqrt[r]{p^mq^s}$ $= \sqrt[r]{p^{m\cdot n}q^{n\cdot s}}$.

52. L'extraction des racines étant l'inverse de l'élévation aux puissances, il faudra suivre des règles opposées. On extraira donc d'abord la racine demandée du coefficient; on écrira le radical, et l'on divisera l'exposant de chaque lettre sous le signe, par celui de la racine demandée. Ainsi, la racine quarrée de $9\sqrt{a^4b^4} = 3\sqrt{a^2b^2}$..... la racine quarrée de $16\sqrt[3]{a^2b^6} = 4\sqrt[3]{ab^3}$... la racine cubique de $\sqrt[5]{a^6b^3c^9} = \sqrt[5]{a^2bc^3}$... La racine cubique de $-8\sqrt[4]{x^9y^3} = -2\sqrt[4]{x^3y}$.

La racine de l'ordre n de $\sqrt[m]{x^rz^s} = \sqrt[m]{x^{\frac{r}{n}}z^{\frac{s}{n}}}$.

Lorsqu'on ne pourra pas extraire la racine exacte du coefficient, ni diviser exactement les exposans sous le signe par celui de la racine demandée, il faudra se contenter d'indiquer l'extraction. Ainsi, la racine cubique de $3\sqrt{m^2n} = \sqrt[3]{3} \times \sqrt{m^{\frac{2}{3}}n^{\frac{1}{3}}}$.

53. Au lieu de diviser les exposans sous le radical par celui de la racine demandée, il sera quelquefois plus commode de multiplier l'exposant du radical par celui de la racine; car on sent bien que rendre l'exposant du radical plus grand, c'est réellement faire une extraction. Ainsi, dans le dernier exemple, je commence par faire passer le coefficient sous le radical, ce qui donne $\sqrt{9m^2n}$. Je multiplie l'exposant du radical (qui est censé être 2) par 3, et j'ai $\sqrt[6]{9m^2n}$, qui est l'expression de la racine cubique de $3\sqrt{m^2n}$.

De même, dans l'exaltation, au lieu de multiplier les

les exposans sous le signe, par celui de la puissance demandée, on obtiendra le même résultat en divisant l'exposant du radical par celui de la puissance. Par exemple, pour élever $3\sqrt[8]{a^2b^3}$ au quarré, on peut écrire $9\sqrt[4]{a^2b^3}$.

Si les quantités radicales étoient fractionnaires, les règles que nous venons de prescrire s'y appliqueroient également, en y joignant celles qui concernent les fractions.

Des quantités radicales sous la forme d'exposans fractionnaires.

54. Les quantités radicales peuvent être mises sous la forme de puissances fractionnaires : car $\sqrt{b}$ indique qu'il faut extraire la racine quarrée de b; mais $b^{\frac{1}{2}}$ est cette même extraction effectuée (42). Donc $\sqrt{b} = b^{\frac{1}{2}}$. Par la même raison, $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ .... $\sqrt[4]{y^3} = y^{\frac{3}{4}}$ .... $\sqrt[5]{x^3y^2} = x^{\frac{3}{5}}y^{\frac{2}{5}}$ ...... $\sqrt[m]{a^nb^r} = a^{\frac{n}{m}}b^{\frac{r}{m}}$.

Pour passer de la forme radicale à la puissance fractionnaire, il faut diviser l'exposant de chaque lettre par celui du radical, et supprimer ensuite le radical. Ainsi $\sqrt[3]{m^2c} = m^{\frac{2}{3}}c^{\frac{1}{3}}$ et réciproquement *pour passer de la puissance fractionnaire à la forme radicale, il faut écrire la quantité sous le radical telle qu'elle est, et donner à ce radical pour exposant le dénominateur des exposans fractionnaires.* Ainsi $a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{a^3b^2}$.

Si le radical avoit un coefficient autre que l'unité, on feroit passer ce coefficient sous le radical (46), avant de changer la forme du radical.

Il est souvent utile de mettre les radicaux sous la forme des puissances fractionnaires, parce que le calcul des radicaux par les exposans fractionnaires, est plus sim pleet plus facile à exécuter. Wallis est le premier qui ait introduit ce changement dans l'algèbre, en sorte que, dans les deux séries suivantes,

$$\sqrt[1]{a} \ldots \sqrt[2]{a} \ldots \sqrt[3]{a} \ldots \sqrt[4]{a} \ldots \sqrt[5]{a} \ldots \sqrt[6]{a} \ldots \sqrt[m]{a}$$

$$a^{\frac{1}{1}} \ldots a^{\frac{1}{2}} \ldots a^{\frac{1}{3}} \ldots a^{\frac{1}{4}} \ldots a^{\frac{1}{5}} \ldots a^{\frac{1}{6}} \ldots a^{\frac{1}{m}}.$$

Chaque terme de la ligne inférieure est égal au terme correspondant de la ligne supérieure.

Quiconque aura bien compris ce que nous avons dit sur les quantités radicales, et sur les différentes manières de les écrire, n'aura pas de peine à suivre la réduction suivante :

$$\frac{\sqrt[3]{\frac{a^2c^5}{b}} \times \sqrt[4]{ac^3}}{b\sqrt{\frac{a}{c}}} = \frac{\frac{a^{\frac{2}{3}}c^{\frac{5}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}} \times a^{\frac{1}{4}}c^{\frac{3}{4}}}{\frac{b\,a^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{2}}}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}\,b^{-1-\frac{1}{3}}\,c^{\frac{5}{3}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}$$

$$= a^{\frac{5}{12}}\,b^{-\frac{4}{3}}\,c^{\frac{35}{12}} = \frac{a^{\frac{5}{12}}c^{\frac{35}{12}}}{b^{\frac{16}{12}}} = \sqrt[12]{\frac{a^5c^{11+24}}{b^{4+12}}} = \frac{c^2}{b}\sqrt[12]{\frac{a^5c^{11}}{b^4}}.$$

Toutes ces différentes combinaisons constituent le langage algébrique; et il est nécessaire de se les rendre bien familières.

De la formation des puissances des polynomes.

55. Pour élever un polynome à une puissance, il faut multiplier ce polynome par lui-même, autant de fois, moins une, qu'il y a d'unités dans l'exposant de la puissance. Ainsi, pour élever au quarré le binome $a+b$, il faut multiplier $a+b$ par $a+b$. En effectuant la multiplication, on aura

$$\begin{array}{l} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2. \end{array}$$

On remarquera dans ce produit que a^2 est le quarré du premier terme de la racine; $2ab$ est le double produit du premier terme de la racine par le second, et b^2 est le quarré du second terme de la racine. Or, $a+b$ peut représenter tous les binomes possibles: on peut donc conclure généralement que le quarré d'un binome quelconque contient, 1°. le quarré du premier terme de la racine; 2°. deux fois le produit du premier terme de la racine par le second; 3°. le quarré du second terme de la racine.

Prenons pour exemple le nombre 12, qu'on peut décomposer en $10+2$, ou $9+3$, ou $8+4$. Quel que soit le binome qu'on choisisse pour représenter 12, le premier nombre pourra être représenté par a, et le second par b. $8+4$, par exemple, sera représenté par $a+b$, en faisant $a=8$, $b=4$, et $(8+4)^2 = 64+2\times32+16=144$, quarré de 12.

Ainsi, le quarré de $2bx+3cy=4b^2x^2+12bcxy+9c^2y^2$; celui de $x+\frac{1}{2}a=x^2+ax+\frac{1}{4}a^2$.

Si les termes de la racine sont, l'un positif et l'autre négatif, les deux termes de la puissance qui

contiennent les quarrés seront positifs, et le produit du double du premier par le second, sera négatif : ainsi $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

56. Pour élever $a+b$ au cube, on commence par l'élever au quarré ; on multiplie ensuite ce quarré par $a+b$, ce qui donne le cube. Ainsi $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, où l'on voit que le cube d'un binome contient quatre termes. 1°. Le cube du premier terme de la racine, a^3 ; 2°. trois fois le produit du quarré du premier terme par le second, $3a^2b$; 3°. trois fois le produit du premier terme par le quarré du second, $3ab^2$; 4°. le cube du dernier terme, b^3. Quant aux signes, ils sont tous positifs lorsque ceux de la racine sont positifs ; ils sont tous négatifs lorsque tous ceux de la racine le sont ; et ils sont alternativement positifs et négatifs, lorsque ceux de la racine sont l'un positif et l'autre négatif. C'est une suite de la règle des signes dans la multiplication (16).

Exemples. $(a+1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$ ..... $(a-1)^3 = a^3 - 3a^2 + 3a - 1$ ... $(2bx+3cy)^3 = 8b^3x^3 + 3(4b^2x^2 . 3cy) + 3(2bx . 9c^2y^2) + 27c^3y^3 = 8b^3x^3 + 36b^2cx^2y + 54bc^2xy^2 + 27c^3y^3$.

Pour élever $a+b$ à la quatrième puissance, on multipliera le cube déjà obtenu par $a+b$, et il en résultera, toute réduction faite, les cinq termes suivans :

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Pour élever $a+b$ à la cinquième puissance, on multipliera les cinq termes précédens, formant la quatrième puissance par $a+b$, et l'on aura $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

On obtiendroit de la même manière les autres puissances d'un binome quelconque ; car ce que

nous disons du binome $a+b$, s'applique également à tous les autres.

Mais si, pour arriver à une puissance très-élevée, il falloit passer par toutes les puissances inférieures, on sent bien que le calcul seroit toujours fort long, et souvent impraticable. Les géomètres du siècle dernier ont cherché à découvrir dans la formation des puissances une loi fixe et invariable, au moyen de laquelle on pût former les termes successifs d'une puissance quelconque d'un binome, sans avoir besoin des puissances intermédiaires. Newton eut la gloire de la trouver; elle est généralement connue sous le nom de *formule du binome*. Nous allons en présenter ici les résultats : nous donnerons ailleurs sa démonstration, lorsque nous aurons développé tous les principes d'analyse sur lesquels elle est appuyée.

57. Pour élever un binome à une puissance quelconque, il y a plusieurs règles à observer. 1°. La règle des signes, 2°. celle des lettres et des exposans, 3°. celle des coefficiens.

La règle des signes est que, si les deux termes du binome sont positifs, tous les termes de la puissance seront positifs; et si un terme de la racine est négatif, les termes de la puissance seront alternativement positifs et négatifs.

La règle des lettres et des exposans est que chaque terme de la puissance est le produit des deux termes du binome affectés chacun d'un exposant qui varie à chaque terme. Dans le premier terme de la puissance, le premier terme de la racine a pour exposant l'exposant même de la puissance; et le second terme de la racine a zéro pour exposant (21).

Dans les termes suivans, l'exposant du premier terme de la racine diminue successivement d'une unité, jusqu'à ce qu'il devienne zéro, tandis que l'exposant du second terme de la racine augmente

successivement d'une unité, jusqu'à ce qu'il devienne égal à celui de la puissance. Ainsi, pour élever $a+b$ à la sixième puissance, on écrira (abstraction faite des coefficiéns)

$$a^6b^0+a^5b^1+a^4b^2+a^3b^3+a^2b^4+a^1b^5+a^0b^6.$$

On peut conclure de la loi des exposans, que, dans le développement d'une puissance du binome, il y aura toujours un terme de plus qu'il n'y a d'unités dans l'exposant de la puissance.

La règle des coefficiens étoit plus difficile à démontrer; et c'est précisément celle que Newton a découverte. Voici en quoi elle consiste.

Pour trouver le coefficient d'un terme quelconque de la puissance proposée d'un binome $a+b$, *multipliez le coefficient du terme précédent par l'exposant de* a *dans ce même terme, et divisez le produit par le nombre qui marque le rang de ce terme précédent; le quotient sera toujours le coefficient cherché.*

Exemple. On demande le développement de la sixième puissance de $a+b$: on aura $(a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$, où l'on voit que le coefficient du quatrième terme, par exemple, est égal au coefficient du troisième, multiplié par l'exposant de a dans ce même terme, et divisé par 3; car $20=\frac{15\times 4}{3}$.

Ces règles sont générales, et ne souffrent aucune exception; en sorte que pour élever $a+b$ à la puissance indéterminée n, on aura la formule générale

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n.n-1}{2}a^{n-2}b^2$$
$$+\frac{n.n-1.n-2}{2.3}a^{n-3}b^3$$

$$+ \frac{n \,.\, n-1 \,.\, n-2 \,.\, n-3}{2.3.4} a^{n-4} b^4$$

$$+ \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{2.3.4.5} a^{n-5} b^5 + ..$$

et ainsi de suite, jusqu'au dernier terme, qui sera :

$$\frac{n \,.\, n-1 \,.\, n-2 \,.\, n-3 \,.\, n-4 \ldots . 1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \ldots\ldots\ldots , n-1 \,.\, n} b^n = b^n.$$

Si l'on veut appliquer cette formule à des cas particuliers, il faudra donner à n des valeurs particulières, et continuer la formule jusqu'à ce qu'on trouve un coefficient égal à zéro, ce qui arrivera lorsqu'on aura un nombre de termes égal à $n+1$.

Exemple. Soit $n = 5$. La formule générale deviendra :

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + \frac{5.4}{2} a^3 b^2 + \frac{5 \,.\, 4 \,.\, 3}{2 \,.\, 3} a^2 b^3$$

$$+ \frac{5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2}{2.3.4} a b^4 + \frac{5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1}{2.3.4.5} b^5.$$

En faisant la réduction $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

Nous avons pris pour modèle le binome $a+b$, comme étant le plus simple de tous. Si l'on avoit un autre binome plus compliqué, tel que $2cx^2 + 3d^2y$, on représenteroit $2cx$ par a, et $3d^2y$ par b, et l'on auroit $(2cx^2 + 3d^2y)^3 = (2cx^2)^3 + 3(2cx^2)^2 \times 3d^2y + 3(2cx^2)(3d^2y)^2 + (3d^2y)^3$. Après cela, on développeroit chaque terme selon les règles ordinaires de la multiplication.

58. La formule du binome que nous venons d'expliquer, sert non-seulement pour élever à une puissance quelconque un binome donné, mais encore pour extraire les racines des quantités qu'on peut mettre sous la forme du binome : car il est dé-

montré qu'elle a également lieu lorsque n est un nombre fractionnaire ; or les puissances fractionnaires désignent des extractions de racines (54). Il est vrai que pour avoir la racine exacte, il faudroit prendre une infinité de termes dans le développement de la formule, ce qui est impossible ; mais elle est d'un fréquent usage, lorsqu'on ne veut qu'une racine approchée, sur-tout si on a soin de rendre la série convergente, comme nous le verrons (125).

Enfin, la même formule servira encore pour avoir le développement en séries des quantités fractionnaires, lorsque le dénominateur sera un binome élevé à une puissance : car elle a lieu lorsque n a une valeur négative ; or, en pareil cas, l'expression est une fraction (20) (a).

59. Les mêmes loix servent encore pour élever un trinome, un quadrinome, en général un polynome quelconque à une puissance donnée. Car soit, par exemple, le trinome $p+q+r$, qu'on veut élever au quarré. On supposera pour un moment que $p+q$ est représenté par a, et l'on aura $(a+r)^2 = a^2+2ar+r^2$. Substituant à la place de a^2 sa valeur $p^2+2pq+q^2$, et à la place de a celle $p+q$, on aura $(p+q+r)^2 = p^2+2pq+q^2+2pr+2qr+r^2$; ce qui nous apprend que le quarré d'un trinome est composé de six termes ; savoir, du quarré de chaque terme de la racine, et du double produit de chaque terme par les deux autres.

Si l'on avoit le quadrinome $p+q+r+s$ à élever

(a) Toutes les propriétés du binome ne doivent être regardées jusqu'à présent que comme des faits constatés par l'expérience et l'observation, elles ne deviendront pour nous des vérités mathématiques que lorsqu'elles auront été démontrées rigoureusement.

au quarré, on feroit $p+q=a$, et $r+s=b$; et les règles pour élever le quadrinome dépendroient de celles du binome. On auroit $(p+q+r+s)^2 = (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 = p^2+2pq+q^2+2pr+2ps+2qr+2qs+r^2+2rs+s^2$; c'est-à-dire que le quarré d'un quadrinome est composé de dix termes: savoir, du quarré de chaque terme de la racine, et du double produit de chaque terme par tous les autres.

On voit par les détails dans lesquels nous sommes entrés, que la formule du binome s'étend également aux puissances positives, négatives, entières et fractionnaires : elle sert aussi pour les trinomes, les quadrinomes, &c. comme pour les binomes : c'est ce qui la rend d'un usage si général dans toute l'analyse. Il importe de savoir l'appliquer à toutes sortes d'exemples.

De l'extraction des racines des polynomes.

60. C'est dans la formation des puissances algébriques que l'on apprend à trouver les racines. On sait, par exemple, que le quarré du binome $a+b$ est composé de trois termes de a^2 quarré de a, de $2ab$ double produit de a par b, et de b^2 quarré de b. Donc pour extraire la racine quarrée de $a^2+2ab+b^2$, je commence par extraire la racine quarrée du premier terme, elle est a; je soustrais le quarré de a de la quantité proposée, il me reste $2ab+b^2$; mais je sais que $2ab$ est le produit du double du premier terme déjà trouvé par le second, c'est-à-dire que $2ab = 2a \times b$: donc si je divise le second terme du quarré par $2a$, le quotient b fera connoître le second terme de la racine.

Si ce terme b est le véritable terme de la racine, son produit par $2a+b$ étant soustrait du reste de la

puissance, il ne doit rien rester. Or $(2a+b)\times b$ $=2ab+b^2$: soustraction faite, il ne reste rien ; donc $a+b$ est la racine quarrée de $a^2+2ab+b^2$.

Puisque les quarrés de tous les binomes sont formés de la même manière, on peut poser la règle suivante pour l'extraction de leurs racines.

Si la quantité proposée est un quarré parfait composé de trois termes, on est sûr qu'elle a un binome pour racine.

Si les trois termes composant le quarré sont positifs, les deux termes de la racine seront tous positifs ou tous négatifs; car le quarré de $a+b$ est le même que celui de $-a-b$ (16). Mais si le second terme du quarré est négatif, un des termes de la racine (n'importe lequel) sera négatif; car $a-b$, et $b-a$, sont également la racine quarrée de $a^2-2ab+b^2$.

Pour avoir le premier terme de la racine, prenez la racine du premier terme de la puissance ; élevez cette racine à son quarré ; retranchez ce quarré du premier terme de la puissance, il ne vous restera que deux termes.

De ces deux termes, l'un sera le double produit du premier terme déjà trouvé par le second ; l'autre sera le quarré du second.

Pour trouver le second terme de la racine, divisez le second terme de la puissance par le double du terme déjà trouvé, vous aurez pour quotient le second terme de la racine. Pour le vérifier, vous multiplierez ce second terme par le double du premier, plus par lui-même ; vous soustrairez ce produit des deux termes qui vous restoient de la puissance. Si après la soustraction il ne reste rien, l'opération est finie, et la racine sera exacte.

Exemple. On demande la racine quarrée de $9x^4 - 12x^2y^3 + 4y^6$.

1°. La racine quarrée de $9x^4$ est $3x^2$;

2°. Le double de $3x^2$ est $6x^2$;

3°. Le quotient de $-12x^2y^3$, divisé par $6x^2$, est $-2y^3$;

4°. $4y^6$ est le quarré de $-2y^3$:

Donc $3x^2 - 2y^3$ est la racine demandée.

Nous allons écrire ici le détail du calcul.

$$\begin{array}{l|ll} 9x^4 - 12x^2y^3 + 4y^6 & 3x^2 - 2y^3 \ldots\ldots & \text{racine.} \\ \underline{-9x^4} & \overline{6x^2 \ldots\ldots\ldots} & \text{diviseur.} \\ \quad \underline{+12x^2y^3 - 4y^6} & & \\ \quad\quad 0 \qquad\quad 0 & & \end{array}$$

Deuxième exemple. On demande la racine quarrée de $\frac{a^2x^2}{4} + \frac{abxy}{3} + \frac{b^2y^2}{9}$.

$$\begin{array}{l|ll} \frac{a^2x^2}{4} + \frac{abxy}{3} + \frac{b^2y^2}{9} & \frac{ax}{2} + \frac{by}{3} \ldots\ldots & \text{racine.} \\ -\frac{a^2x^2}{4} & & \\ \overline{\quad 0 \quad} \quad \underline{-\frac{abxy}{3} - \frac{b^2y^2}{9}} & \overline{ax \ldots\ldots\ldots} & \text{diviseur.} \\ \quad\quad\quad 0 \qquad 0 & & \end{array}$$

Pour que la racine soit composée de trois termes, il faut que le quarré en contienne six (59). On opère sur les six termes, comme nous venons de le faire sur les trois de l'exemple, parce que le quarré d'un trinome se compose de la même manière que celui d'un binome.

Exemple. Soit $a^4 - 2a^2x^2 + x^4 - 2a^2y^2 + 2x^2y^2 + y^4$, dont on cherche la racine quarrée :

$$\begin{array}{l|ll} a^4 - 2a^2x^2 + x^4 - 2a^2y^2 + 2x^2y^2 + y^4 & a^2 - x^2 - y^2 & \text{racine.} \\ \underline{-a^4} + \underline{2a^2x^2 - x^4} & & \\ \;\; 0 \qquad\quad 0 \quad 0 \;\; \underline{+2a^2y^2 - 2x^2y^2 - y^4} & \overline{2a^2 \ldots\ldots} & 1^{er}\ \text{divis.} \\ \qquad\qquad\qquad\quad 0 \qquad\quad 0 \qquad 0 & 2a^2 - 2x^2. & 2^e\ \text{divis.} \end{array}$$

La racine du premier terme est a^2 dont le quarré est a^4. Après l'avoir soustrait de la quantité donnée, on a pour reste les cinq termes suivans. Le premier terme de la racine est a^2.

Pour trouver le second, je divise le second terme de la puissance par le double de a^2; le quotient est $-x^2$, qui, multiplié par $2a^2-x^2$, donne $-2a^2x^2+x^4$. Je soustrais ce produit des termes restans de la puissance; il détruit les deux premiers.

Pour trouver le troisième terme de la racine, je divise les termes restans par $2(a^2-x^2)$; le quotient est $-y^2$. Je le multiplie par le diviseur, plus par lui-même, c'est-à-dire par $2a^2-2x^2-y^2$: je soustrais le produit des termes restans de la puissance; et comme tout se détruit, j'en conclus que la racine exacte de la puissance proposée est $a^2-x^2-y^2$.

Exemple second. On demande la racine quarrée de p^4-4p^3+8p+4.

p^4-4p^3+8p+4	p^2-2p-2 ...	racine
p^4		
$o \quad +4p^3-4p^2$	$2p^2$	1er diviseur.
$-4p^2+8p+4$	$2p^2-4p$	2e diviseur.
$+4p^2-8p-4$		
o o o		

61. *Remarque.* Quand nous avons annoncé que le quarré d'un trinome devoit contenir six termes, nous avons entendu un trinome composé de la manière la plus générale, c'est-à-dire, dont chaque terme est composé de lettres différentes. Lorsqu'il se trouve des termes composés de la même lettre, il peut en résulter dans la formation du quarré des termes qui s'ajoutent où se détruisent, comme dans le dernier exemple.

En rapprochant la méthode que nous avons suivie en arithmétique (112), pour extraire les racines quarrées des nombres, de celle que nous venons d'expliquer pour les quantités algébriques, on verra facilement que c'est la même, à quelques différences près, provenant du mélange que les nombres éprouvent dans la composition du quarré : au lieu que dans les quantités algébriques les termes restent séparés jusqu'à la fin du calcul. Par exemple, 43 peut se mettre sous la forme du binome $40+3$, et son quarré sera $1600+240+9=1849$: mais dans cette dernière expression, on ne retrouve plus les trois termes séparés comme dans la première.

Par la même raison, 469 peut prendre la forme du trinome $400+60+9$, et son quarré sera composé des six termes suivans, $160000+2.24000+3600+2.3600+2.540+81=219961$. Cette dernière expression ne présente plus séparément les six termes qui se sont confondus; et pour les retrouver en arithmétique, on observe de quelle manière ils se confondent dans la formation des quarrés; on sépare ces termes par des virgules, et on suit pour tout le reste les mêmes règles que pour les quantités algébriques.

On voit ici que l'algèbre simplifie, en les généralisant, les raisonnemens que nous avons été obligés de faire en arithmétique, pour démontrer les règles de l'extraction des racines. Nous aurons occasion de faire sentir fréquemment cette supériorité de l'algèbre sur l'arithmétique.

62. Pour extraire une racine cubique, il faut savoir comment se composent les cubes. Or, la formation des puissances nous apprend (56) que le cube d'un binome est composé de quatre termes; savoir : 1°. du cube du premier terme de la racine; 2°. du triple produit du quarré du premier terme par le se-

cond; 3°. du triple produit du premier terme par le quarré du second; 4°. du cube du second.

Donc, 1°. pour que la racine cubique soit un binome, il faut que la puissance soit composée de quatre termes.

2°. Si tous les termes de la puissance sont positifs, ceux de la racine le seront aussi; si tous ceux de la puissance sont négatifs, tous ceux de la racine seront négatifs; et si ceux de la puissance sont alternativement positifs et négatifs, ceux de la racine seront alternativement positifs et négatifs.

3°. Pour avoir le premier terme de la racine, on extraira la racine cubique du premier terme de la puissance; on élèvera cette racine au cube, pour la soustraire de la puissance proposée.

Le premier des trois termes restans est composé du triple du quarré du terme déjà trouvé, multiplié par celui qu'on cherche. Donc si on divise le second terme de la puissance par trois fois le quarré du premier terme de la racine, le quotient donnera le second terme de la racine.

4°. Pour s'assurer que ce quotient est exact, il faudra que trois fois le quarré du premier par le second, plus trois fois le premier par le quarré du second, plus le cube du second, puissent être soustraits des trois derniers termes sans reste.

En réfléchissant attentivement sur la composition du cube, on verra facilement que les trois termes dont nous venons de parler, plus le premier terme déjà détruit par la première opération, forment le cube des deux termes déjà trouvés à la racine; et si la racine est composée de trois termes, le cube de ce trinome doit se trouver dans les termes de la puissance. C'est pourquoi, après avoir trouvé un nouveau terme à la racine, on élèvera toute la racine au

cube, et on le soustraira de toute la puissance, sans avoir égard aux soustractions déjà faites.

Exemple. On demande la racine cubique de $8a^3 - 12a^2x + 6ax^2 - x^3$.

Je me contente d'écrire le détail, qu'il sera très-aisé de suivre, d'après tout ce que nous venons de dire.

$$\begin{array}{l|l} 8a^3 - 12a^2x + 6ax^2 - x^3 & 2a - x\ldots \text{ racine.} \\ \underline{-8a^3} & 12a^2\ldots\ldots \text{ diviseur.} \\ 0 \quad \underline{+12a^2x - 6ax^2 + x^3} & \\ \quad\quad 0 \quad\; 0 \quad\; 0 & \end{array}$$

L'extraction de la racine cubique des nombres repose sur les mêmes principes que celle des quantités algébriques. En effet, quelle que soit la racine numérique, elle pourra toujours être représentée par $a + b$, et son cube sera représenté par $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Soit 42 dont on demande la troisième puissance; je puis décomposer cette racine en $40 + 2$, et son cube sera $64000 + 3.3200 + 3.160 + 8 = 74088$.

Pareillement la racine 842 pourra se décomposer en $840 + 2$, et son cube sera $(840+2)^3 = (840)^3 + 3(840)^2.2 + 3.840.2^2 + 2^3 = 596947688$.

On appliqueroit littéralement à l'extraction cubique des nombres, les règles prescrites pour les quantités algébriques, si les différentes parties dont est composé le cube d'un nombre ne se confondoient pas dans l'expression numérique. Il faut donc apprendre à les reconnoître, et à distinguer les rangs dans lesquels elles doivent se trouver. Il faut d'abord connoître les cubes des nombres d'un seul chiffre : on les trouve dans la seconde ligne de la table ci-dessous :

Racines	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9
Cubes	1.	8.	27.	64.	125.	216.	343.	512.	729.

On remarquera qu'un nombre ne peut avoir à son cube plus que le triple du nombre de ses chiffres : car 9, qui est le plus grand de tous les nombres simples, n'en a que trois ; et 99, le plus grand des nombres composés de deux chiffres, n'en a que six ; et ainsi des autres.

Cela posé, soit le nombre 74088 dont on demande la racine cubique. On partagera ce nombre en tranches de trois chiffres chacune, en allant de droite à gauche ; on extraira la racine cubique du plus grand cube contenu dans la première tranche 74 ; cette racine est 4, dont le cube est 64 : on retranchera 64 de 74 ; il reste 10 : j'abaisse la seconde tranche 088 à côté de 10 ; j'élève 4 à son quarré, ou plutôt 40, parce que ce sont quatre dixaines ; j'ai 1600 que je triple = 4800. Je divise 10088 par 4800, ou, ce qui revient au même, je divise 100 par 48 ; le quotient est 2. Avant d'écrire ce quotient à la racine, je le multiplie par $3(40)^2 = 4800$; le produit est 9600, que j'écris à part ; j'élève le 2 à son quarré ; je multiplie ce quarré par trois fois 40 ; j'écris le produit 480 au-dessous de 9600 ; enfin, j'élève 2 au cube ; j'ajoute ce cube avec les autres sommes, les trois réunies donnent 10088 : donc la soustraction est possible ; et parce qu'il ne reste rien, j'en conclus que la racine cubique de 74088 est 42.

Nous allons présenter ici le détail du calcul.

74,088	42 .... racine.
64	$3.(40)^2 = 4800$ diviseur.
10,088	
9600	
480	
8	
10088	
000	

Après

Après avoir trouvé le second chiffre de la racine, il eût été plus simple d'élever au cube les deux chiffres déjà trouvés, et de retrancher ce cube des deux premières tranches.

Le reste, quand il y en a un, joint à la tranche suivante, formera le troisième membre de division. On élèvera ensuite au cube les trois chiffres de la racine, et on soustraira ce cube des trois premières tranches de la racine, sans égard aux soustractions déjà faites : on continuera ainsi jusqu'à ce qu'on soit parvenu à la dernière tranche, et qu'on ait trouvé le dernier chiffre de la racine.

De l'extraction des racines d'un degré quelconque.

63. La formule du binome nous apprend que $(a+b)^m = a^m + m\,a^{m-1}b + \&c.$ Donc pour repasser de la puissance à la racine, il faudra, 1°. extraire la racine proposée du premier terme de la puissance. Ce premier terme est a^m; or la racine m de a^m est $a^{\frac{m}{m}} = a$ (42). 2°. Il faudra diviser le second terme de la puissance par le premier terme de la racine, élevé à une puissance moindre d'un degré que la racine proposée, et multiplié par l'exposant même de la racine; car le second terme de la puissance est $m\,a^{m-1}b$: or il est visible que ce terme divisé par $m\,a^{m-1}$ donne pour quotient b, second terme de la racine. Cette règle est générale et ne souffre aucune exception : il est aisé de voir que les règles prescrites pour l'extraction des racines quarrées et cubiques, en sont des cas particuliers. Appliquons ces règles à l'extraction de la racine cinquième de 1419857.

J'observe d'abord que le plus petit nombre composé de deux chiffres, c'est-à-dire, 10, a six chiffres à sa cinquième puissance, qui est 100000, d'où il

suit que la racine cinquième du nombre proposé, a au moins deux chiffres. On pourra donc la représenter par $a+b$, a représentant les dixaines, et b les unités : or $(a+b)^5=a^5+5a^4b+....$; donc pour trouver le premier chiffre de la racine, il faudra chercher la valeur de a. Or, la cinquième puissance des dixaines ne pouvant pas contenir des dixaines de mille, la valeur de a ne peut pas se trouver sur les cinq derniers chiffres : je sépare donc ces cinq chiffres, et, s'il en restoit plus de cinq à gauche, je ferois à leur égard le même raisonnement, et je séparerois ainsi le nombre proposé en tranches de cinq chiffres chacune, en allant de droite à gauche. La dernière de ces tranches vers la gauche contiendra la cinquième puissance du premier chiffre de la racine.

Je dis donc : la plus grande cinquième puissance contenue dans 14 est 1, dont

$$\begin{array}{l} 14,19857 \\ \underline{1} \\ 131,9857 \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} 17........ & \text{rac.} \\ 5.1^4=5... & \text{div.} \end{array} \right.$$

la racine est 1. 1 élevé à la cinquième puissance, donne 1 ; soustrait de 14, reste 13 : à côté j'abaisse la tranche suivante, et je remarque que le produit des unités de la racine par la quatrième puissance des dixaines, ne descend pas au-dessous des dixaines de mille, donc la valeur de $5a^4b$ doit se trouver dans les trois chiffres 131, c'est-à-dire dans le reste que l'on a eu après la première opération, augmenté du premier chiffre de la tranche que l'on a abaissée. Je divise donc 131 par $5.1^4=5$. Le quotient donne 7, que j'écris à la racine : j'élève 17 à la cinquième puissance ; je soustrais cette cinquième puissance du nombre donné ; il ne reste rien après la soustraction, donc 17 est la racine exacte.

Nous terminerons ici ce que nous avons à dire sur l'extraction des racines ; 1°. parce qu'on n'a jamais

besoin, dans les questions élémentaires, de l'extraction cubique, et des degrés supérieurs; 2°. parce que, quand on en a besoin, on les extrait avec une grande facilité, par le moyen des logarithmes (Arith. 177).

Méthode d'approximation pour l'extraction des racines d'un degré quelconque.

64. Lorsque les quantités dont on se propose d'extraire la racine, ne sont pas des puissances exactes, on ne peut avoir les racines que par approximation. La formule du binome est d'une grande utilité pour cela.

Si on demandoit, par exemple, la racine quarrée de a^2+x, on écriroit $(a^2+x)^{\frac{1}{2}}$ (54). Or, la formule du binome a lieu pour les puissances fractionnaires comme pour les entières; il suffira donc de substituer a^2 à la place de a, x à la place de b, et $\frac{1}{2}$ à la place de n, dans la formule générale (57). On aura, après avoir fait la réduction,

$$(a^2+x)^{\frac{1}{2}}=a+\frac{x}{2.a}-\frac{x^2}{8a^3}+\frac{x^3}{16a^5}-\frac{5x^4}{128a^7}+\frac{7x^5}{256a^9}-\ldots$$

Si on avoit à extraire la racine de a^2-x, le résultat seroit le même, aux signes près, qui seroient constamment négatifs, à commencer du second terme.

Pour que ces séries puissent être de quelque utilité, il faut, 1°. qu'elles soient convergentes (25): or elles le deviendront lorsqu'on aura $a>x$. 2°. Il faut qu'elles convergent le plus rapidement possible, parce qu'alors on a une approximation suffisante, en ne calculant que les deux ou trois premiers termes de la série.

Pour faire l'application de ces formules, cher-

chons la racine approchée de 101. Le plus grand quarré contenu dans 101, est 100... Soit donc $a^2=100$, et $x=1$, on aura $(100+1)^{\frac{1}{2}}=10+\frac{1}{20}-\frac{1}{8000}+\frac{1}{1600000}\ldots$

La série est si convergente, qu'on peut se borner aux trois premiers termes. En faisant la réduction, et convertissant la fraction en décimales, on a $(100+1)^{\frac{1}{2}}=10{,}0498\ldots$ En cherchant la même racine par les règles de l'arithmétique (Arith. 114), on auroit trouvé exactement les mêmes décimales.

Si on avoit à extraire la racine quarrée de 24, on pourroit le décomposer en $16+8$; mais il conviendra encore mieux d'écrire $25-1=a^2-x$, parce que la serie sera beaucoup plus convergente. Il faut en général que le premier terme soit un quarré, et que la différence du premier au second, soit la plus grande possible.

L'extraction par approximation de la racine cubique se fait en suivant le même procédé; il n'y a de différence que dans la substitution de l'exposant. Pour avoir donc la racine cubique de a^3+x, on écrira $(a^3+x)^{\frac{1}{3}}=a+\frac{x}{3a^2}-\frac{x^2}{9a^5}+\frac{5x^5}{81a^8}\ldots$

Exemples. On demande la racine cubique de 65. On fera $a^3=64, x=1$; et l'on aura, en ne prenant que les trois premiers termes, $(64+1)^{\frac{1}{3}}=4+\frac{1}{48}-\frac{1}{9216}\ldots$ qui se réduisent à 4,0207.. Si on élève cette racine au cube, on trouvera 64,9987, qui ne diffère pas de 65, de deux dix millièmes.

On seroit parvenu à une semblable approximation, en extrayant la racine cubique de 65, soit par la méthode ordinaire de l'arithmétique, soit par la voie des logarithmes.

On demande encore la racine cubique de 9. On

fera dans la formule $a^3 = 8$, $x = 1$ et $n = \frac{1}{3}$; et l'on aura, en prenant les six premiers termes, $(8+1)^{\frac{1}{3}}$

$$= 2 + \frac{1}{4.3} - \frac{1}{4.9.8} + \frac{5}{4.9^2 8^2} - \frac{10}{4.9^3.8^3} + \frac{22}{4.9^3 8^4}$$

$$= 2 + \frac{956518}{11943936} = 2,08008\ldots$$

De l'analyse ou de l'application de l'Algèbre à la résolution des problêmes.

65. L'arithmétique universelle dont nous nous occupons, est composée de deux parties : la première est celle qui apprend à faire les combinaisons et les calculs des quantités représentées par des signes généraux ; de manière que les quantités dont on ignore les valeurs numériques, puissent être combinées avec la même facilité que les quantités représentées par des nombres. Ses opérations ne supposent que les propriétés générales de la quantité. Cette première partie dont nous venons d'expliquer les principes, s'appelle proprement *algèbre*, ou science du calcul.

La seconde partie consiste à savoir faire usage de la méthode générale de calculer les propriétés de la grandeur, pour découvrir la valeur des quantités qu'on cherche par le moyen de celles qu'on connoît. Cette seconde partie se nomme *analyse*, ou décomposition ; parce qu'en effet l'analyse est l'art d'acquérir des connoissances, en allant du connu à l'inconnu, par une suite de raisonnemens qui sont renfermés les uns dans les autres, et qu'il faut pour ainsi dire *décomposer* pour appercevoir leur liaison et leur rapport.

66. L'analyse mathématique est proprement l'art de résoudre les problêmes.

Résoudre un problême, c'est chercher la valeur d'une ou de plusieurs quantités inconnues, par le moyen des rapports qu'elles ont avec les quantités connues.

L'énoncé d'un problême à résoudre présente nécessairement des rapports ou des conditions entre des quantités connues et des quantités inconnues. Ce sont ces rapports ou ces conditions qu'il s'agit de bien saisir dans l'énoncé de la question, pour les traduire en langage algébrique, et former ainsi les équations.

Toute formule qui exprime algébriquement l'égalité de deux grandeurs, s'appelle généralement équation : c'est la double expression de la même quantité séparée par le signe d'égalité, comme dans cet exemple $3\times4=8+4$... Les termes qui sont à gauche du signe d'égalité, forment le premier membre de l'équation; ceux qui sont à droite forment le second membre.

Former une équation, c'est exprimer algébriquement à quelles conditions les rapports assignés sont égaux. Par exemple, qu'on propose cette question: *Deux personnes ont ensemble 72 ans; la plus âgée a cinq fois autant d'âge que la plus jeune; quel est l'âge de la seconde?* Si on saisit bien le sens de la question, on verra qu'il énonce, 1°. le rapport qu'il y a entre l'âge de la première et l'âge de la seconde: ce rapport est celui de $5:1$. 2°. On y verra cette condition à remplir, que *cinq fois l'âge de la première, plus l'âge de la seconde, font 72 ans.*

Pour traduire cette condition en langage algébrique, on représentera l'âge de la seconde par x; donc l'âge de la première sera représenté par $5x$: or les deux âges doivent égaler 72 ans; donc $5x+x=72$. Voilà l'équation formée.

Dans l'exemple ci-dessus, et dans plusieurs autres

de même nature, les rapports de la quantité inconnue avec les quantités connues se présentent naturellement; et il n'est pas difficile de les saisir dans l'énoncé de la question. Mais il n'en est pas ainsi dans tous les problêmes; les rapports sont quelquefois si compliqués, qu'ils ne peuvent être apperçus facilement que par les esprits les plus exercés. Ni livres ni maîtres ne peuvent suppléer à cette sagacité naturelle qui constitue le génie du calculateur : il faut cependant convenir qu'elle se développe et se fortifie par l'habitude et la pratique du calcul

On ne peut donc pas assigner de règles générales pour former l'équation d'un problême : chaque équation différente demande un raisonnement différent. Tout ce qu'on peut dire de plus précis, *c'est de traiter également les quantités connues et les inconnues et de combiner celles-ci avec les premières de la même manière que si, les connoissant, on vouloit vérifier si elles remplissent les conditions du problême.*

Lorsque l'énoncé d'un problême renferme plusieurs quantités inconnues, il faut former plusieurs équations pour les résoudre; et en général, il faut toujours autant d'équations qu'il y a d'inconnues.

Si l'énoncé de la question présente assez de rapports pour former autant d'équations que d'inconnues, le problême est *déterminé.*

Si l'énoncé de la question ne présente pas assez de rapports pour former autant d'équations que d'inconnues, le problême est *indéterminé.*

Le degré d'une équation est toujours déterminé par celui de la plus haute puissance des inconnues qu'elle renferme. Ainsi dans une équation du premier degré, l'inconnue, ou les inconnues, ne sauroient aller au-delà du premier degré, comme dans la suivante $ax + by = m$.

Une équation du second degré est celle où une des inconnues au moins monte à la seconde puissance, ou contient le produit de deux inconnues, comme dans la suivante $ax^2+bxy+cy^2=m$.

Une équation du troisième degré est celle qui contient un terme où l'inconnue est élevée à la troisième puissance, ou est le produit de deux inconnues dont la somme des exposans est 3...

Il en est de même des équations des degrés supérieurs.

L'algèbre n'a été long-temps destinée qu'à résoudre des équations numériques : toutes les quantités connues étoient représentées par des nombres; mais pour que toutes les équations fussent autant de formules générales, propres à résoudre toutes les questions semblables, on a substitué des lettres aux nombres (43); et pour distinguer les quantités connues, qu'on appelle aussi les données du problême, des quantités inconnues, on a coutume de représenter les données par les premières lettres a, b, c... &c., et les inconnues par les dernières x, y, z...&c.

De la résolution des équations déterminées.

67. Quand une fois on est parvenu à former l'équation d'un problême, et à la réduire à la forme la plus simple qu'elle puisse avoir, en la débarrassant de tous les facteurs inutiles, il ne reste plus qu'à la résoudre, c'est-à-dire, à faire en sorte que l'inconnue se trouve toute seule dans un membre, et que l'autre membre ne soit composé que des quantités connues. Quand on est parvenu à ce point, la première cesse d'être inconnue, puisqu'on la trouve égale à des quantités connues. On parvient généralement à ce but par le moyen du principe suivant.

Si à des grandeurs égales on ajoute des quantités égales, ou si de grandeurs égales on retranche des quantités égales, les sommes ou les différences sont égales.

Si on multiplie, ou si on divise des grandeurs égales par une même quantité, les produits ou le quotient seront égaux.

68. Si j'ai une équation de cette forme $x-a=m$, ou $x+a=m$, je puis, dans le premier cas, ajouter a au premier membre : il deviendra $x-a+a$, ou tout simplement x ; mais pour conserver l'égalité entre les deux membres, il faudra ajouter $+a$ au second : il deviendra $m+a$; donc l'équation première prendra la forme suivante, $x=m+a$; c'est-à-dire que la quantité connue a disparoîtra du premier membre, et passera dans le second avec un signe contraire.

Dans le second cas, si je retranche a du premier membre, il ne restera plus que x ; mais pour conserver l'égalité, il faudra le retrancher du second membre ; c'est-à-dire qu'il faudra l'écrire avec un signe négatif : donc la seconde équation prendra la forme suivante, $x=m-a$, où l'on voit que a disparoîtra du premier membre, et se trouvera dans le second avec un signe contraire.

Concluons donc généralement que pour faire passer une quantité, positive ou négative, d'un membre dans un autre, il faut l'effacer dans le membre où elle se trouve, et l'écrire dans l'autre avec un signe contraire.

Exemple. Soit l'équation $2x+a-b=m+x$. Elle deviendra $2x-x=m-a+b$ ou $x=m-a+b$; donc x sera déterminée.

69. Si j'ai l'équation $\frac{ax}{b}+\frac{f}{c}=\frac{m}{n}$, je puis multi-

plier les deux membres de l'équation par le produit des trois dénominateurs, sans détruire l'égalité : j'aurai, en faisant la réduction, $acnx+bfn=bcm$, où l'on voit que l'équation est délivrée de ses fractions. Donc pour faire évanouir les dénominateurs d'une équation, *il faut multiplier tous les termes des deux membres par le produit des dénominateurs de toutes les fractions, et faire les réductions convenables.*

C'est ainsi que l'équation $\frac{ax}{b}-\frac{cx}{d}=m-n$ devient $adx-bcx=bdm-bdn$.

70. Après avoir fait évanouir les deux dénominateurs, avoir rassemblé tous les termes multipliés par l'inconnue dans le premier membre, et les termes connus dans le second, l'équation finale sera de cette forme $mx=ab+pr$. On dégagera x de son coefficient, en divisant les deux membres de l'équation par m, et l'on aura $x=\frac{ab+pr}{m}$: donc *pour dégager l'inconnue de son coefficient, on divise toute l'équation par ce coefficient.* Présentons toutes ces règles réunies dans le même exemple.

71. Soit l'équation $\frac{ax}{b}+m-n=\frac{px}{q}+r$.

Je commence par faire évanouir les deux fractions (69); j'ai $aqx+bmq-bnq=bpx+bqr$: je fais passer tous les termes contenant des x dans le premier membre, et tous les termes connus dans le second (68); j'ai $(aq-bp)x=bqr-bmq+bnq$; je dégage x de son coefficient (70), et j'ai $x=\frac{bqr-bmq+bnq}{aq-bp}$.

On voit par tout ce que nous venons de dire, que,

pour résoudre une équation du premier degré à une inconnue, on n'a besoin que des quatre premières règles de l'algèbre, de l'addition, de la soustraction, de la multiplication et de la division.

Nous allons appliquer toutes ces règles à la solution de quelques problèmes.

72. *Probléme premier.* Une personne a acheté deux mètres de drap de différentes qualités; le mètre de la première qualité coûte 4 fr. de plus que celui de la seconde; la somme des deux, multipliée par 8, fait 160 : on demande le prix du mètre de chaque qualité ?

Solution. Si on connoissoit le prix du mètre de la première qualité, celui de la seconde seroit aussi connu, puisqu'il est égal à celui de la première diminué de 4 fr. Soit donc représenté par x le prix de la première qualité, $x-4$ représentera celui de la seconde; la somme des deux sera $2x-4$, laquelle, multipliée par 8, doit égaler 160 : donc $(2x-4)8 = 160$.... voilà l'équation formée. Elle n'est que la traduction en langage algébrique, des rapports énoncés dans le problême. Pour s'en convaincre, nous allons écrire les deux versions dans deux colonnes, afin qu'on puisse les comparer plus facilement.

Enoncé de la question.	*Traduction algébrique.*
Le prix du mètre de la première qualité est inconnu.	. . . . . x.
Le prix de la seconde qualité est moindre de 4 fr. que celui de la première.	. . . $x-4$.

La somme des deux
multipliée par 8, fait 160. . . $(2x-4)8=160$,
ou $16x-32=160$.

Pour résoudre cette équation, je fais passer le 32 dans le second membre; j'ai $16x=160+32=192$: je dégage x de son coefficient, j'ai $x=\frac{192}{16}=12$: donc le mètre de la première qualité a coûté 12 fr., et par conséquent celui de la seconde a coûté 8 fr.

Pour vérifier ces nombres, il faut voir s'ils satisfont aux conditions du problème. Or on trouve effectivement que $(12+8)\times 8=160$; donc, &c.

Dans l'équation $(2x-4)8=160$, on pourroit faire évanouir d'abord le facteur 8, en divisant toute l'équation par 8; le calcul en eût été plus simple; c'est même une attention qu'il faut avoir, et qui fait un des principaux avantages du calcul, en le débarrassant des facteurs inutiles, à mesure qu'ils se présentent.

Dans les problêmes suivans, nous supprimerons une partie du détail dans lequel nous sommes entrés, et qu'il est très-aisé de suppléer.

73. *Problême second.* Un propriétaire a distribué 140 fr. à 21 ouvriers; une partie a été payée à raison de 6 fr. par chaque ouvrier, l'autre partie à raison de 8 fr.; ne pourroit-on pas savoir combien d'ouvriers ont été payés à 6 fr., et combien ont été payés à 8 fr.?

SOLUTION.

Enoncé de la question.	*Traduction algébrique.*
Le nombre d'ouvriers payés à 6 fr. est inconnu.	. . . . $=x$.
Le nombre d'ouvriers payés à 8 fr. est 21, di-	

minué du nombre de ceux qui ont été payés à 6 fr.	. . $=21-x$.
L'argent donné aux premiers est 6 fr. multipliés par le nombre d'ouvriers qui les ont reçus..	. . . $=6\times x$.
L'argent donné aux seconds est 8 fr. multipliés par le nombre d'ouvriers qui les ont reçus..	. $=8\times(21-x)$
Les deux sommes réunies font 140 fr. . . .	$6x+8\times(21-x)=140$.

L'équation étant ainsi formée, on a $6x+168-8x=140$, ou $168-2x=140$: faisant passer 140 dans le premier membre, et $-2x$ dans le second, $168-140=2x$, ou $28=2x$, et $x=14$: donc il y avoit 14 ouvriers payés à raison de 6 fr., et par conséquent 7 ouvriers payés à raison de 8 fr.

En effet, 6 fr. multipliés par 14, font 84 fr., et 8 fr. multipliés par 7, font 56 fr. : or $84+56=140$.

74. *Problême troisième.* On demande à une personne quel est son âge ; elle répond, si vous en prenez la moitié plus le tiers, et que vous y ajoutiez 6, vous aurez mon âge. Ces données suffisent-elles pour le trouver ?

SOLUTION.

Enoncé de la question.	*Traduction algébrique.*
L'âge est inconnu. .	. . . . . . x.
La moitié de cet âge, plus le tiers de cet âge, plus 6, font une somme égale à l'âge lui-même..	. $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+6=x$.

Je fais évanouir les deux fractions (69), j'ai $3x+2x+36=6x$, et $36=6x-5x=x$; donc l'âge demandé est 36 ans. En effet, la moitié de 36, plus le tiers, plus 6 font 36.

75. *Problême quatrième.* Un bassin reçoit de l'eau par trois canaux ; le premier, s'il couloit seul, rempliroit le bassin en 10 heures, le second le rempliroit en 5 heures, le troisième en 4 heures ; on suppose encore qu'il y ait une soupape de fond qui videroit le canal en 20 heures : on demande combien de temps il faudra pour que le bassin soit plein, les trois canaux et la soupape coulant ensemble ?

SOLUTION.

Enoncé de la question.	*Traduction algébrique.*
Le nombre d'heures nécessaires pour que le bassin se remplisse est inconnu.	. . . . . . $=x$.
Le premier canal fournit par heure $\frac{1}{10}$ de la quantité d'eau nécessaire pour remplir le bassin : donc il fournira en totalité $\frac{1}{10}$ répété autant de fois qu'il coulera d'heures.	. . . . . . $\frac{x}{10}$.
Le second fournit par heure $\frac{1}{5}$; donc pendant le nombre d'heures inconnu, il fournira. . .	. . . . . . $\frac{x}{5}$.
Le troisième fournit par heure $\frac{1}{4}$; donc pen-	

dant le nombre d'heures inconnu, il fournira. . . . . $\frac{x}{4}$.

La soupape dépense par heure $\frac{1}{20}$; donc elle laisse échapper du canal pendant le même nombre d'heures. . . . . $\frac{x}{20}$.

L'eau fournie par les trois canaux, diminuée de celle que la soupape laisse échapper dans le même temps, doit remplir le bassin. . . . . . $\frac{x}{10}+\frac{x}{5}+\frac{x}{4}-\frac{x}{20}=1$.

Réduisant toutes les fractions au même dénominateur 20, et faisant évanouir ce dénominateur, on aura, en réduisant $2x+4x+5x-x=20$, et . . $10x=20$, ou $x=2$: donc le bassin se remplira en deux heures.

En effet, le premier canal fournira en deux heures $\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$. . ., le second fournira dans le même temps $\frac{2}{5}$, le troisième fournira $\frac{2}{4}$: donc les trois fourniront $\frac{3}{5}+\frac{2}{4}=\frac{11}{10}$; mais la soupape dépense en deux heures $\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$, donc il restera $\frac{10}{10}=1$.

76. *Problême cinquième.* Un marchand a une somme dont il dépense la première année 100 fr., et augmente le reste d'un tiers; la seconde année il dépense encore 100 fr., et augmente le reste d'un tiers; la troisième année il dépense encore 100 fr., et augmente le reste du tiers; après ces années il se trouve deux fois plus riche qu'au commencement: on demande quelle somme il avoit?

SOLUTION.

Etat de la question.	*Traduction algébrique.*
Le bien du marchand est inconnu.	. . . . . . x.
A la fin de la première année, son bien a diminué de 100 fr.; il est donc.	. . . $x-100$.
Le reste augmenté du tiers, sera.	. . . $x-100+\frac{x-100}{3}$ $=\frac{4x-400}{3}$.
A la fin de la seconde année, le bien diminue encore de 100 fr.	. . . . $\frac{4x-400}{3}-100$ $=\frac{4x-700}{3}$.
Le reste augmente d'un tiers.	. . $\frac{4x-700}{3}+\frac{4x-700}{9}$ $=\frac{16x-2800}{9}$
A la fin de la troisième année, le bien a diminué de 100 fr.	. . . $\frac{16x-2800}{9}-100$ $=\frac{16x-3700}{9}$.
Le reste augmente du tiers.	$\frac{16x-3700}{9}+\frac{16x-3700}{27}$ $=\frac{64x-14800}{27}$.

Le

Le marchand est deux fois plus riche.	$\frac{64x-14800}{27}=2x$.

Donc $64x-14800=54x$; faisant passer les x dans le premier membre, et le terme connu dans le second, $64x-54x=14800$; ou $10x=14800$... et $x=1480$: donc le bien du marchand étoit de 1480 fr.

77. *Problême sixième.* On fait partir de Fontainebleau pour Lyon un courrier qui fait 3 myriamètres en deux heures; deux heures après il en part un second de Paris, qui fait deux myriamètres par heure; la distance de Paris à Fontainebleau est de 7 myriamètres: on demande quel chemin doit faire le courrier qui part de Paris pour atteindre le courrier parti de Fontainebleau?

SOLUTION.

Enoncé de la question.	*Traduction algébrique.*
Le chemin que doit faire le courrier est inconnu.	x.
Le chemin fait par le courrier de Paris, est au chemin fait par le courrier de Fontainebleau, dans le même temps, comme la vîtesse du premier est à la vîtesse du second.	$2:\frac{3}{2}::x:y=\frac{3x}{4}$.
Dans les 2 heures que le courrier a d'avance, il fera 3 myriamètres. . .	........$=3$
L'espace parcouru par	

le premier courrier, lorsqu'il aura atteint le second, parcourra un espace égal, 1°. à la distance de Paris à Fontainebleau; 2°. aux trois myriamètres parcourus par le second; 3°. au chemin que celui-ci parcourra dans le temps que celui de Paris parcourra x .... $x = 7 + 3 + \frac{3x}{4}$

Cette équation résolue, donne $4x = 40 + 3x$, donc $x = 40$. Donc le courrier de Paris atteindra celui de Fontainebleau, après avoir parcouru 40 myriamètres.

78. Dans les problêmes que nous avons résolus jusqu'ici, nous ne nous sommes attachés qu'aux cas particuliers que présente l'énoncé de chacun d'eux; mais on conçoit qu'il y en a une infinité d'autres qui ne diffèrent de ceux-ci que par les quantités connues.

Pour ne pas recommencer les calculs toutes les fois qu'on considère de nouveaux nombres, on a cherché à exprimer le résultat final d'une manière indépendante de leur valeur. Pour cela, on a représenté les nombres donnés par des caractères indéterminés, qui puissent représenter également tous les nombres particuliers. Par exemple, le dernier problême pourroit s'énoncer ainsi:

Deux courriers partent de divers lieux et en différens temps. La distance qui les sépare avant le départ, est représentée par a. Le premier courrier a parcouru un chemin représenté par b; lorsque le second se met en marche, leurs vîtesses respectives sont entr'elles comme les deux nombres $m : n$.

On demande à quelle distance le second atteindra le premier?

En faisant ici le même raisonnement que pour le cas particulier que nous avons résolu, on aura $x = a + b + \frac{m}{n}x$. Donc $x = \frac{n(a+b)}{n-m}$.

Cette expression générale contient tous les cas particuliers, quelles que soient les valeurs numériques que l'on assigne aux lettres a, b, m, n. Elle peut même s'étendre au cas où les courriers iroient à la rencontre l'un de l'autre, en observant que, dans ce cas, l'espace représenté par b seroit négatif, ainsi que la vîtesse m du premier courrier, parce que ces deux expressions sont prises dans un sens opposé à la vîtesse du second, et à l'espace qu'il parcourt; donc on auroit $x = \frac{(a-b)n}{n+m}$. Pour comprendre les deux expressions dans une seule, on écrira $x = \frac{(a \pm b)n}{n \mp m}$.

Ces formules générales, dont la précédente n'est qu'un exemple très-simple, sont un des plus grands avantages de l'algèbre, parce que toutes les fois qu'un problème rentre dans les formules, il est sur-le-champ résolu, et l'on n'a pas besoin de recommencer les raisonnemens souvent compliqués qui les ont fait découvrir.

De la résolution des problêmes à plusieurs inconnues.

79. Les problêmes à plusieurs inconnues demandent autant d'équations qu'il y a d'inconnues, pour être résolus. L'énoncé de la question doit fournir les conditions nécessaires pour former les équations; il ne s'agit que de savoir les saisir pour

les exprimer algébriquement. Ces équations servent à chasser ou à *éliminer* successivement toutes les inconnues, moins une. On parvient ainsi à une équation finale, qui ne contient plus qu'une inconnue, et qui se résout comme nous l'avons expliqué (67 et suiv.).

Pour chasser ou pour *éliminer* une inconnue, on prend la valeur d'une même inconnue dans deux équations différentes; on égale ces deux valeurs, et de-là résulte une équation qui contient une inconnue de moins.

Exemple. Soient les deux équations générales du premier degré à deux inconnues $ay + bx = m$,... $cy + dx = n$.

La première donne $y = \frac{m - bx}{a}$; la seconde donne $y = \frac{n - dx}{c}$. En égalant ces deux valeurs de y, on a $\frac{m - bx}{a} = \frac{n - dx}{c}$, où l'on voit que y a disparu. Cette équation résolue, donnera la valeur de x; et celle-ci, une fois connue, servira à faire connoître y. Appliquons cette méthode à un exemple.

Partager le nombre 20 en deux parties, dont la plus grande surpasse la plus petite de 4... Soit représentée par x la plus grande partie, et la plus petite par y.

Enoncé de la question.	*Traduction algébrique.*
Première condition. Les deux parties réunies font 20..............	......$x + y = 20$.
Seconde condition. La	

plus grande surpasse la
plus petite de 4....... ......$x - y = 4$.

La première équation donne $x = 20 - y$... La seconde donne $x = y + 4$; donc $20 - y = y + 4$, et $20 - 4 = 2y$, ou $16 = 2y$, et $y = 8$. Après avoir trouvé la valeur de y, on trouvera celle de x; en remontant à une des deux équations primitives, à la première, par exemple, et mettant la valeur de y, on aura $x = 20 - 8 = 12$.

Généralisons le problême selon que nous avons dit (78). L'énoncé de la question, présenté d'une manière générale, sera :... Partager un nombre donné a, en deux parties, dont la plus grande surpasse la plus petite d'une quantité connue b.

En appliquant à ces deux caractères le même raisonnement que nous avons fait sur les nombres 20 et 4, nous aurons les mêmes équations que ci-dessus, en mettant a à la place de 20, et b à la place de 4, savoir $x + y = a$, et $x - y = b$... Donc $x = a - y$, et $x = b + y$..... Donc $a - y = b + y$ et $y = \frac{a-b}{2}$, on trouve ensuite $x = \frac{a+b}{2}$.

La même question auroit pu être énoncée d'une manière plus directe : *Trouver deux nombres dont on connoit la somme* a *et la différence* b.

Les valeurs que nous avons trouvées pour x et y, nous apprennent que *le plus grand des deux nombres est égal à la moitié de la somme des deux, plus à la moitié de la différence; et le plus petit est égal à la moitié de la somme des deux, moins la demi-différence.*

C'est ainsi qu'en généralisant les questions, on parvient souvent à la découverte des propriétés

générales des nombres, c'est-à-dire à la connoissance des propriétés des nombres qui ont lieu dans tous les cas semblables.

80. La méthode que nous avons suivie pour éliminer une inconnue, est très-générale et très-simple; la suivante paroîtra peut-être plus élégante et plus commode.

Soient les deux équations générales $ax+by=m$... $cx+dy=n$, en multipliant tous les termes de la premiere équation par c, coefficient de x dans la seconde, elle devient $acx+bcy=cm$... En multipliant tous les termes de la seconde par a, coefficient de x dans la première, elle devient $acx+ady=an$.... Si on retranche actuellement la première de la seconde, ou la seconde de la premère, on aura $acx-acx+ady-bcy=an-cm$, ou $ady-bcy=an-cm$, équation qui ne contient pas x.

Si le terme qu'on veut faire évanouir étoit positif dans une équation, et négatif dans l'autre, il faudroit ajouter les équations au lieu de les soustraire. On peut donc établir la règle suivante pour l'élimination : *Si le coefficient du terme que vous voulez faire évanouir, n'est pas le même dans les deux équations, faites en sorte qu'il le devienne, en multipliant la première équation par le coefficient du terme qui doit s'évanouir dans la seconde, et la seconde équation par le coefficient du terme qui doit s'évanouir dans la première : ajoutez ensemble, ou retranchez les deux équations, suivant que les termes qui doivent disparoître auront le même signe, ou des signes différens.*

C'est en suivant cette règle, que nous avons fait évanouir x dans les deux équations générales. L'équation à laquelle nous sommes parvenus, donne

$(ad - bc)y = an - cm$. Faisant évanouir le coefficient de y, on a $y = \frac{an - cm}{ad - bc}$. Substituant cette valeur de y dans une des deux équations générales, on aura la valeur de $x = \frac{bn - dm}{bc - ad}$.

Quand on a trouvé la valeur de y, il est plus simple de chercher celle de x, en reprenant les équations générales, et éliminant y comme on a éliminé x.

81. *Problême septième.* Une personne a des jetons dans les deux mains; si elle en fait passer un de la droite dans la gauche, elle en aura un égal nombre dans chaque main. Si au contraire, elle en fait passer un de la gauche dans la droite, elle en aura le double dans celle-ci. On demande combien de jetons elle avoit d'abord dans chaque main ?

Énoncé de la question.	*Traduction algébrique.*
Le nombre des jetons contenus dans chaque main est inconnu......	... Dans la droite .. x ... Dans la gauche . y
Première condition. Si de la main droite on en fait passer un dans la gauche, il y en aura le même nombre dans chaque main	.... $x - 1 = y + 1$.
Seconde condition. Si de la main gauche on en fait passer un dans la droite, il y en aura le double dans celle-ci....	.... $x + 1 = 2y - 2$.

Je retranche la première équation de la seconde,

et les x disparoissent $2=y-3$, ou $5=y$... La première donne $x=y+2=5+2=7$. Donc cette personne avoit sept jetons dans la main droite, et cinq dans la gauche. Ces deux nombres satisfont aux conditions du problême.

82. *Problême huitième.* Une personne a échangé 2000 fr. de mandats en numéraire métallique; une partie a été échangée au cours de 5 fr. 25 cent. p. %; la seconde partie au cours de 3 fr. 5 cent. p. %. Les deux sommes ont produit 91 fr. On demande quelle somme a été échangée au premier cours, et quelle somme a été échangée au second?

Énoncé de la question.	*Traduction algébrique.*
Première condition.	
Les deux sommes sont inconnues	La 1re ..... x. La 2e. ..... y.
Les deux sommes réunies font 2000 fr.	... $x+y=2000$.
Seconde condition. Les deux sommes produisent en numéraire 91 fr.	x prod. à 5, 25 p. % $\frac{5{,}25x}{100}$ y prod. à 3, 5 p. % ..... $\frac{3{,}5y}{100}$ donc $\frac{5{,}25}{100}x+\frac{3{,}5y}{100}=91$. ou $5{,}25x+3{,}5y=9100$.

Multipliant la première par le coefficient de y dans la seconde, et retranchant le produit de la seconde, on aura $1{,}75\,x=2100$. Donc

$$x=\frac{2100}{1{,}75}=1200\ldots \text{ et } y=2000-1200=800.$$

Donc la somme échangée au premier cours, est 1200 fr. de mandats, et au second cours, 800 fr.

Généralisons la question. Une personne a échangé

une somme de mandats, représentée par a en numéraire; une partie a été échangée au cours de $\frac{1}{m}$ du capital; l'autre partie, au cours de $\frac{1}{n}$ du capital. Les deux sommes ont produit en numéraire la somme représentée par b. On demande quelle somme a été échangée au premier cours et quelle somme a été échangée au second?

En raisonnant comme ci-dessus, nous formerons les deux équations $x+y=a \ldots\ldots \frac{x}{m}+\frac{y}{n}=b$. Faisant évanouir les deux fractions $nx+my=b.mn$. Multipliant la première par n, et retranchant le produit de la seconde, on aura $(m-n)y$ $=n\,(bm-a)$; donc $y=\frac{n\,(bm-a)}{m-n} \ldots$ et $x=a-y=a-n\left(\frac{bm-a}{m-n}\right)=m\left(\frac{a-bn}{m-n}\right)$.

Si l'on suppose $b=91$, $a=2000$, $m=\frac{100}{5{,}25}$, $n=\frac{100}{3{,}5}$ on aura le cas particulier que nous avons résolu ci-dessus.

83. *Probléme neuvième.* Une femme apporte des œufs au marché; elle a calculé qu'en les vendant 5 pour 3 décimes, elle y perdoit un déc.; elle les vend 3 pour 2 déc., et elle y gagne 1 déc. Combien avoit-elle porté d'œufs au marché, et combien lui coûtoient-ils?

Énoncé de la question.	*Traduction algébrique.*
Le nombre des œufs est inconnu	..... $=x$.

Le nombre de décimes qu'ils lui ont coûté est inconnu	. . . . . $= y$.
Première condition. Ce qu'elle en retire en les vendant 5 pour 3 déc., égale ce qu'ils lui coûtent moins 1.	à 5 p. 3 déc. elle en retire $\frac{3x}{5}$ Donc $\frac{3x}{5} = y - 1$.
Seconde condition. Ce qu'elle en retire en les vendant 3 pour 2 déc., égale ce qu'ils lui coûtent plus 1.	à 3 p. 2 déc. elle en retire $\frac{2x}{3}$ Donc $\frac{2x}{3} = y + 1$.

Je fais évanouir les fractions dans les deux équations $3x = 5y - 5$... $2x = 3y + 3$. Je multiplie la première par 2, et la seconde par 3... $6x = 10y - 10$... $6x = 9y + 9$. Donc $10y - 10 = 9y + 9$... et $y = 19$. Substituant cette valeur de y dans la première équation, on a $3x = 95 - 5$... $x = 30$.

Donc cette femme avoit porté 30 œufs au marché, et ils lui coûtoient 19 décimes.

De la résolution des problêmes à trois inconnues.

84. Pour résoudre un problême à trois inconnues, il faut que l'énoncé de la question fournisse le moyen de former trois équations, exprimant chacune des conditions différentes. En comparant la première avec la seconde, on fera évanouir une des trois inconnues par une méthode semblable à celle que nous venons d'employer pour les équations à deux inconnues. En comparant la première équation avec la troisième, ou la seconde avec la troisième, on fera évanouir la même inconnue. On n'aura plus que deux inconnues et deux équations, auxquelles on appliquera littéralement tout

ce qui a été dit sur les problêmes à deux inconnues.

Exemple. Soient les trois équations générales du premier degré, à trois inconnues

$$ax+by+cz=p$$
$$a'x+b'y+c'z=q$$
$$a''x+b''y+c''z=r.$$

En multipliant la première par c', et la seconde par c, et retranchant les produits l'un de l'autre, on aura l'équation suivante:

$(ac'-a'c)x+(bc'-b'c)y=pc'-qc$, qui ne renferme plus z. En multipliant la première par c'', et la troisième par c, et retranchant les produits, on aura

$(ac''-a''c)x+(bc''-b''c)y=pc''-rc$; laquelle ne contient pas z. Avec ces deux équations on éliminera y, et l'on n'aura plus qu'une seule équation à résoudre, et une seule inconnue.

85. *Problême dixième.* Trouver trois nombres dont on connoît la somme, en les prenant deux à deux.

Énoncé de la question.	*Traduction algébrique.*
Les trois nombres pris séparément, sont inconnus.	1er..... x 2^{e}..... y 3e..... z
Conditions. Leurs sommes, deux à deux, sont supposées connues....	$x+y=a$ $x+z=b$ $y+z=c$

En retranchant la seconde de la première, on a $y-z=a-b$.

Celle-ci, ajoutée à la troisième, donne $2y=a-b+c$... Donc $y=\frac{a-b+c}{2}$.

En retranchant la troisième de la première, on a $x-z=a-c$.

Celle-ci, ajoutée à la seconde, donne $2x=a-c+b$... Donc $x=\frac{a-c+b}{2}$.

De l'équation $z-x=c-a$, on tire, en substituant la valeur de x... $z=\frac{b+c-a}{2}$.

Pour faire une application de ces formules, supposons que la somme des deux premiers soit 9 ou $a=9$; celle du premier et du troisième $=10$, ou $b=10$; celle du second et du troisième $=13$, ou $c=13$. On trouvera $x=3$, $y=6$, $z=7$.

86. *Problème onzième.* Trois personnes, que je désignerai par A, B, C, ont pris en commun des billets à la loterie. La mise de A ajoutée à la moitié des mises des deux autres, fait 17 fr. La mise de B ajoutée au tiers de celles des deux autres, est aussi 17 fr. La mise de C ajoutée au quart de celles des deux autres, fait encore 17 fr. On demande quelle est la mise de chacun ?

SOLUTION.

Énoncé de la question.	*Traduction algébrique.*
Les trois mises sont inconnues	1re. x ... 2e. ... y .. 3e. ... z
Première condition. La mise de A, plus la moitié de la mise des deux autres fait 17 fr. (que nous représenterons par q) ...	.... $x+\frac{y+z}{2}=q$.
Seconde condition. La mise de B ajoutée au tiers de la somme des mises des deux autres fait aussi 17 f.	.... $y+\frac{x+z}{3}=q$.

Troisième condition.
La mise de c, plus le quart de celle des deux autres est encore 17 fr.. .... $z+\frac{x+y}{4}=q(b)$.

Faisant évanouir les fractions dans ces trois équations, elles deviennent $2x+y+z=2q$...$3y+x+z=3q$...$4z+x+y=4q$.

La première, retranchée de la seconde, donne $2y-x=q\ (a)$.

La troisième, retranchée de la première, multipliée par 4, donne $7x+3y=4q$.

Multiplions ces deux dernières équations, la première par 3, et la seconde par 2, et retranchons le premier produit du second... $17x=5q$, et $x=\frac{5q}{17}=5$. L'équation (a) donne $y=\frac{q+x}{2}=\frac{17+5}{2}=11$.... L'équation (b) donne $z=17-4=13$. Donc la mise de A est de 5 fr.; celle de B, de 11 fr.; celle de C, de 13 fr.

87. *Remarques.* Partout ce que nous avons dit sur la résolution des équations du premier degré, on voit que la théorie et la pratique des équations, c'est-à-dire la solution des questions par les équations, consiste, 1°. à former autant d'équations qu'il y a de quantités inconnues; 2°. ces équations doivent être comparées et combinées entr'elles, jusqu'à ce qu'on arrive à une nouvelle équation qui ne renferme plus qu'une inconnue combinée, avec des quantités connues; on peut regarder cette équation comme la dernière conclusion à laquelle on arrive dans la solution des problêmes, ou comme le moyen par lequel on parvient à la solution finale; 3°. les quatre premières règles de l'algèbre suffisent pour résoudre les équations du

premier degré ; mais pour celles du second degré, il faut y ajouter l'élévation aux puissances, et l'extraction des racines, comme nous allons le voir dans l'article suivant :

Résolution des équations du second degré.

88. Toutes les fois que la traduction algébrique de l'énoncé d'une question renfermera le quarré de l'inconnue, le problême sera du second degré (66), comme dans cet exemple : *Trouver un nombre tel que la moitié de son quarré, plus le tiers du même quarré, soit égal à 30.* Si nous appelons x ce nombre, son quarré sera x^2 ; et la traduction algébrique de la question proposée, sera $\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{3}=30$... Faisant évanouir les fractions, et réunissant les termes semblables $5x^2=180$ ou $x^2=36$. Or il est évident que pour avoir la valeur de x dans cette équation, il faut extraire la racine quarrée des deux membres. La racine quarrée de x^2 est x, celle de 36 est 6 ; donc $x=6$..

Toutes les équations semblables à la précédente, peuvent être comprises dans l'équation générale $\frac{ax^2}{m}=p$, d'où l'on tire $x^2=\frac{mp}{a}$, et $x=\sqrt{\frac{mp}{a}}$. Ainsi, pour résoudre les équations du second degré qui ne contiendront que le quarré de l'inconnue, il faudra suivre la règle suivante :

Faites en sorte que le quarré de l'inconnue se trouve seul, et sans autre coefficient que l'unité positive, dans un membre de l'équation, et que l'autre membre ne soit composé que de quantités connues. Extrayez ensuite la racine quarrée des deux membres.

Ces sortes de questions n'ont aucune difficulté, et il est inutile d'y insister davantage; mais il arrive souvent que l'équation du second degré, outre le quarré de l'inconnue, contient encore l'inconnue *linéaire*, ou élevée à la première puissance. Alors l'équation est un peu plus compliquée, et demande, pour être résolue, quelques considérations générales sur la nature des quarrés, comme on le verra dans l'exemple suivant:

89. Supposons qu'on se propose de trouver un nombre tel que si de trois fois ce nombre on retranche son quarré, le reste soit égal à 2. En nommant ce nombre x, $3x$ en sera le triple; son quarré sera x^2, et la traduction algébrique de la question proposée, sera $3x - x^2 = 2$.

Pour tirer la valeur de x de cette équation, on commencera par rendre le quarré de l'inconnue positif (40), ce que l'on fait, en faisant passer tout le premier membre dans le second, et le second dans le premier; ou plus simplement, en changeant tous les signes de l'équation, les positifs en négatifs, et les négatifs en positifs. On aura $x^2 - 3x = -2$. Pour avoir la valeur de x, il faudra extraire la racine quarrée des deux membres de l'équation (88); et pour cela, il faudroit qu'ils fussent des quarrés parfaits. Or, le premier membre n'est ni le quarré d'un monome, ni le quarré d'un binome (55). Il faut donc chercher à le rendre un quarré parfait.

On sait que le quarré d'un binome est égal au quarré du premier terme, plus au double produit du premier terme par le second, plus au quarré du second. En considérant donc x^2 comme le quarré du premier terme du binome, et $-3x$ comme étant égal au double produit de x par le double du second, $-\frac{3}{2}$ sera le second terme. Il

suffit donc d'ajouter son quarré $\frac{9}{4}$ aux deux membres de l'équation précédente, pour rendre le premier un quarré parfait. Cette équation devient ainsi $x^2 - 3x + \frac{9}{4} = \frac{9}{4} - 2$ ou $(x - \frac{3}{2})^2 = \frac{1}{4}$. Extrayant la racine quarrée de chaque membre, on a $x - \frac{3}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$ et $x = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} = 2$, ou 1.

On a donc pour x deux valeurs différentes, suivant qu'on prend le signe $+$ ou le signe $-$ du radical; et il est visible que chacune de ces valeurs satisfait également à la question proposée.

On voit par là que les équations du second degré ont un caractère très-distinct de celles du premier degré, dans lesquelles l'inconnue n'est susceptible que d'une valeur, tandis que dans celles du second degré, l'inconnue a nécessairement deux valeurs, à cause du double signe qui précède les racines paires.

Si dans l'équation proposée, on eût supposé $3x - x^2 = 3$, en complétant le quarré, on auroit eu $x^2 - 3x + \frac{9}{4} = \frac{9}{4} - 3$, et $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}}$. $= \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3}$... La quantité $\sqrt{-3}$ est impossible ou imaginaire; car un nombre réel, positif ou négatif, ne peut avoir un nombre négatif pour quarré. Le problême qui conduit à de pareilles valeurs est impossible; c'est-à-dire qu'il n'existe pas de nombre positif ou négatif, entier ou fractionnaire, tel que si de trois fois le nombre on retranche son quarré, le reste soit égal à 3.

90. Elevons-nous maintenant à la considération la plus générale de l'équation du second degré. Quelle que soit cette équation, on pourra lui donner la forme suivante $x^2 \pm px = \pm q$, ou $x^2 \pm px \mp q = 0$, en transposant tous les termes dans un seul membre; en

en effet, après avoir réuni tous les termes multipliés par x^2 en un seul terme, on pourra diviser toute l'équation par le coefficient de ce terme; ainsi x^2 n'aura d'autre coefficient que l'unité. Quel que soit le coefficient de x, il pourra être représenté par $\pm p$; et enfin, la somme ou la différence des quantités connues sera représentée par $\pm q$..... On aura donc résolu généralement toutes les équations du second degré, quand on aura trouvé la résolution de la formule proposée.

Il est d'abord évident que pour avoir la valeur de x, il faut extraire la racine quarrée de l'équation proposée. Il faut, par conséquent, que le premier membre soit un quarré parfait. Il le deviendra, en lui ajoutant le quarré de la moitié du coefficient du second terme (55); mais pour ne pas détruire l'égalité, il faudra ajouter la même quantité au second membre. L'équation générale deviendra donc $x^2 \pm px + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} \pm q$, ou $(x \pm \frac{1}{2}p)^2$ $\frac{p^2}{4} \pm q$. Donc $x = \mp \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} \pm q}$....... Le double signe qui affecte le radical, fait que x est susceptible de deux valeurs différentes: la première, en donnant au radical le signe $+$; la seconde, lorsqu'on le prend avec le signe $-$; c'est-à-dire que l'on a $x = \mp \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} \pm q}$...... $x = \mp \frac{p}{2}$ $- \sqrt{\frac{p^2}{4} \pm q}$.....

Toutes les fois que la quantité q sera précédée du signe $+$, le radical affectera une quantité positive qui, dans tous les cas particuliers renfermés dans la formule générale, se réduira à une quantité

numérique déterminée. Si cette quantité est un quarré parfait, sa racine sera commensurable; si elle n'est pas un quarré parfait, la racine sera incommensurable; on ne pourra l'avoir que par approximation, mais elle sera réelle dans les deux cas.

Si la quantité q est précédée du signe —, il peut en résulter trois cas:

Le premier a lieu si la quantité q est plus petite que $\frac{1}{4}p^2$; alors après la réduction, la quantité sous le radical sera positive, et par conséquent, le radical sera réel.

Le second cas a lieu si la quantité q est égale à $\frac{1}{4}p^2$; alors la quantité sous le radical devient zéro, et les deux valeurs de x sont égales.

Le troisième cas a lieu lorsque la quantité q est plus grande que $\frac{1}{4}p^2$; alors la quantité sous le radical est négative, et les deux racines de l'équation sont imaginaires.

91. Si on reprend les deux valeurs de x, et qu'on les multiplie entr'elles, on aura $\left(x \pm \frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{p^2}{4} \pm q}\right)\left(x \pm \frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{p^2}{4} \pm q}\right) = x^2 \pm px \mp q = 0$. C'est-à-dire que toute équation du second degré est le produit de deux facteurs du premier degré, et qu'elle peut être mise sous la forme suivante.... $(x-a)(x-b)=0$, ou $x^2 - (a+b)x + ab = 0$. Pour lors $p = \pm(a+b)$.... $q = \pm ab$. Or il est visible que cette équation peut être également satisfaite, par la supposition de $x = a$, et $x = b$; et c'est pour cette raison qu'un problême du second degré est susceptible de deux solutions différentes, parce que toute équation du second degré peut être considérée comme le produit des deux équations du premier degré.

Les équations $p=a+b$, et $q=ab$, nous apprennent encore que le coefficient du second terme est toujours égal à la somme des racines de l'équation prise avec un signe contraire, et que le dernier terme est toujours égal au produit des mêmes racines.

92. *Problème premier.* Partager le nombre 12 en deux parties, telles que leur produit soit 35.

SOLUTION.

État de la question.	*Traduction algébrique.*
Une des deux parties est inconnue..........	..........$x=$
La seconde partie égale 12, diminué de la première...............	..........$=12-x$
Les deux parties multipliées font 35........	...$(12-x)\,x=35$
	ou $12x-x^2=35$.

Rendons le quarré positif (40). $x^2-12x=-35$. Complétant le quarré (55). $x^2-12x+36=-35+36=1$. Extrayant la racine $x-6=\pm 1$ ... Donc $x=6\pm 1=7$, ou 5.

Si l'on prend 7 pour la valeur de x, on aura 5 pour la valeur de $12-x$; et si l'on prend 5 pour la valeur de x, on aura 7 pour celle de $12-x$. Et le produit de 7×5, est 35.

93. *Problème deuxième.* Deux lumières, dont une éclaire quatre fois plus que l'autre, étant séparées par un intervalle de trois mètres, déterminer sur la droite qui les joint, le point qu'elles éclairent également.

SOLUTION.

On sait par les loix de l'optique, que les clartés répandues par un corps lumineux à différentes dis-

tances de ce corps, sont entr'elles en raison inverse des quarrés de ces distances; c'est-à-dire que le même corps éclaire quatre fois moins lorsqu'on s'éloigne deux fois plus.

Etat de la question.	*Traduction algébrique.*
La distance de la plus foible lumière à ce point est inconnue	.... $= x$
La distance de la plus forte lumière à ce point est égale à 3 mètres, diminuée de la distance de ce même point à la plus foible lumière	.... $= 3 - x$
L'intensité de la plus foible lumière, divisée par le quarré de la distance à ce point égale l'intensité de la plus forte divisée par le quarré de sa distance à ce même point..	.... $\frac{1}{x^2} = \frac{4}{(3-x)^2}$

Faisant évanouir les fractions, on a $x^2 + 2x = 3$, d'où l'on tire, en complétant le quarré et extrayant la racine, $x + 1 = \pm 2$. Donc $x = 1$ et $x = -3$.

La première valeur de x apprend que le point également éclairé par les deux lumières, est placé entr'elles, à la distance d'un mètre de la plus foible. La seconde valeur négative apprend ce que l'on pouvoit ignorer d'abord, savoir : qu'il existe un second point également éclairé par les deux lumières, et placé à trois mètres de distance de la plus foible, mais en sens contraire du premier ; c'est-à-dire sur la ligne qui joint les deux lumières,

prolongée du côté opposé à la plus forte. Il est visible que le point étant à trois mètres de distance de la plus foible lumière, et à six mètres de distance de la plus forte, il est également éclairé par les deux.

On voit par là que les valeurs négatives satisfont, comme les positives, aux problêmes; mais qu'elles indiquent une direction opposée à celles qu'on considère comme positives. Si l'on désigne par x la distance de la plus foible lumière au point également éclairé, en prenant cette distance sur la droite qui joint les deux lumières prolongée du côté opposé à la plus forte; $3+x$ sera la distance de la plus forte lumière à ce point. La condition du problême donnera $\frac{1}{x^2}=\frac{4}{(3+x)^2}$ ce qui donne, après les réductions convenables, $x=-1$, et $x=3$, c'est-à-dire les mêmes racines que ci-dessus, mais prises dans un sens contraire, comme cela doit être; parce que, pour former l'équation, on a supposé le côté des x positifs pris dans un sens opposé au premier, ce qui confirme l'idée que nous avons donnée des quantités négatives (6).

Supposons, comme ci-dessus, que x représente la distance de la plus forte lumière au point éclairé, prise entre les deux lumières, dans la direction de la plus forte à la plus foible. $3-x$ sera la distance de la plus foible au même point, et l'équation sera $\frac{1}{(3-x)^2}=\frac{4}{x^2}$.... Donc $x^2=36-24x+4x^2$, ou $x^2-8x=-12$, complétant le quarré et extrayant la racine $x=4\pm2$.... $x=2$ ou 6. Dans cette supposition, les deux racines sont positives, et leur valeur analogue aux précédentes, et telles qu'elles doivent être, d'après la supposition faite.

Généralisons le problême, et supposons que l'intensité des deux lumières soit :: $m : n \dots m > n$ a étant leur distance respective et x la distance de la plus foible au point cherché, on aura, comme ci-dessus, $\frac{n}{x^2} = \frac{m}{(a-x)^2}$, ou $n(a-x)^2 = mx^2$, ou même encore $na^2 - 2nax + nx^2 = mx^2$, ou $na^2 = (m-n)x^2 + 2anx$. Divisant par $(m-n)$, complétant le quarré, et extrayant la racine

$$x = -\left(\frac{an \mp \sqrt{n.m.a^2}}{m-n}\right) = -\frac{a}{m-n}(n \mp \sqrt{mn}).$$

Si nous supposons $n = 1$, $m = 4$, $a = 3$, nous trouverons la solution du cas particulier que nous avons déjà résolu.

Si $m = n$, une racine se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, c'est-à-dire indéterminée, mais en remontant à l'équation du second degré, on voit que les termes qui contiennent x^2 s'évanouissent, et l'équation à résoudre n'est plus que du premier degré; sa racine est $x = \frac{a}{2}$; ce qui nous apprend que lorsque les deux lumières sont égales, le point également éclairé est placé au milieu de la droite qui les joint. La seconde racine devient $-\frac{2an}{0}$, ou infinie; ce qui nous apprend qu'il n'existe pas de point sur le prolongement de la lumière la plus foible, qui soit également éclairé par les deux; mais plus la distance augmentera, plus l'intensité de la lumière à cette distance approchera de l'égalité; et ce ne seroit qu'à une distance infinie que les deux lumières projetteroient une égale quantité de rayons lumineux: ce que l'on conçoit aisément.

94. *Problême troisième.* Une personne a acheté

des agneaux qui lui ont coûté 60 fr. Si on lui en eût donné trois de plus pour le même prix, il les auroit eu un franc meilleur marché chacun. Quel est le nombre d'agneaux qu'il a achetés ?

SOLUTION.

Énoncé de la question.	*Traduction algébrique.*
Le nombre des agneaux est inconnu	 x
Si on en achète trois de plus, le nombre sera $x+3$	. . . . . . $x+3$.
Le prix de chaque agneau est égal à la somme totale, divisée par le nombre des agneaux : il est donc dans le premier cas.	. . . . $\frac{60}{x}$,
Et dans le second cas.	. . . . $\frac{60}{x+3}$
Ce dernier prix doit être plus petit que le premier d'une unité, donc	. . . . $\frac{60}{x+3}=\frac{60}{x}-1$.

Faisant évanouir les fractions, et réduisant $x^2+3x=180$. Complétant le quarré, et extrayant la racine $x+\frac{3}{2}=\pm\frac{27}{2}$. Donc $x=12$, ou -15; donc on avait acheté 12 agneaux, qui coûtèrent, par conséquent, 5 fr. chacun.

Quoique la solution de l'équation ait donné deux valeurs pour x, il est évident que la nature des cas particuliers que nous examinons, exclut la seconde, qui est négative, et qui ne peut satisfaire à l'état de la question dans le sens le plus direct. Cette seconde valeur deviendroit positive, et résoudroit

directement le problême, si nous faisions un léger changement à l'énoncé de la question, et la première racine positive deviendroit à son tour négative; supposons, par exemple, que si on eût donné trois agneaux de moins pour le même prix, chacun eût coûté 1 fr. de plus. Cette condition traduite, donne $\frac{60}{x}+1=\frac{60}{x-3}$, d'où l'on tire $x^2-3x=180$, et $x-\frac{3}{2}=\pm\frac{27}{2}$; donc $x=15$, et $x=-12$.

On voit par-là que quand la valeur négative ne peut résoudre le problême dans le sens direct, elle le résout dans le sens indirect, ou pour mieux dire, elle donne la solution d'un autre problême qui a beaucoup d'analogie avec celui dont on s'occupe. Ce qui est une nouvelle preuve de la richesse du langage algébrique, à la généralité duquel rien n'échappe.

95. *Problême quatrième.* On demande deux nombres dont on connoît la somme et le produit.

Solution. Soit x, un des deux nombres... y le second... soit p, la somme des deux nombres, et q le produit...

Première condition. La somme des deux est égale à p ....$x+y=p$.

Seconde condition. Le produit des deux est égal à q .... $xy=q$.

La dernière donne... $y=\frac{q}{x}$..... La première donne $y=p-x$. Donc $\frac{q}{x}=p-x$... ou $q=px$

$-x^2\ldots$ et $x^2-px+q=0\ldots$ c'est la formule générale des équations du second degré. Donc tous les problêmes de ce genre qu'on peut proposer, se réduisent toujours au précédent.

96. La théorie des équations du second degré ne souffre aucune difficulté ; et l'on peut résoudre généralement tous les problêmes de ce genre, parce qu'il est toujours possible de compléter le quarré sans introduire de nouvelles difficultés dans le calcul. Cette théorie est aussi ancienne que celle des équations du premier degré ; on la trouve dans les ouvrages de Diophante ; mais il a l'art d'arranger les conditions de manière à ne pas tomber dans une équation composée, c'est-à-dire qui contienne le quarré de l'inconnue, avec la première puissance.

Il se propose, par exemple, le problême précédent, qui contient la théorie générale des équations du second degré ; et voici comme il s'y prend pour le mettre en équation. La somme des deux nombres étant donnée, il en cherche la différence, et il prend cette différence pour l'inconnue. Il exprime ensuite le plus grand des deux nombres par la moitié de la somme, plus la moitié de la différence, et le plus petit par la moitié de la somme, moins la demi-différence (79) ; et il n'a qu'à satisfaire à l'autre condition, c'est-à-dire égaler leur produit au nombre donné q... Nommant la somme donnée p, la différence inconnue x, le plus grand nombre sera représenté par $\frac{p+x}{2}$, et le plus petit par $\frac{p-x}{2}$....
Egalant leur produit à q, on a $\frac{p^2-x^2}{4}=q$..... ou $x^2=p^2-4q$, et $x=\pm\sqrt{p^2-4q}$... Donc le plus

grand des deux nombres sera $\frac{p}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{p^2-4q}$, et le plus petit $\frac{p}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{p^2-4q}$.

Diophante résout encore quelques autres questions du même genre, en employant à propos la somme ou la différence pour inconnue. Il parvient toujours à une équation dans laquelle il n'a pas besoin de compléter le quarré. La méthode générale que nous avons suivie nous dispense d'employer celle de Diophante; mais il est bon de la connoître, pour juger des progrès de l'analyse, et pour admirer le génie et l'adresse de son auteur: nous allons les retrouver encore dans la question suivante.

Analyse indéterminée.

97. Lorsque l'énoncé de la question qu'on se propose de résoudre, ne présente pas assez de conditions à traduire en langage algébrique, pour former autant d'équations qu'il y a de quantités inconnues, le problème est alors indéterminé, c'est-à-dire qu'il est susceptible d'un nombre infini de solutions différentes, parce que, dans ce cas, on ne peut jamais réduire les équations à une seule qui ne contienne qu'une inconnue. Tel est le problème suivant : *Trouver deux nombres dont la somme soit quadruple de leur différence.* Il est évident que si on représente les deux nombres par x et y, la condition énoncée dans le problème sera exprimée par l'équation suivante $x+y=4(x-y)$; et parce que l'énoncé de la question ne présente pas d'autre condition à remplir, on ne peut pas former d'autre équation entre les deux inconnues. La précédente se réduit à $5y=3x$. Si l'on veut conserver

au calcul toute sa généralité, il n'y a pas d'autre moyen de résoudre cette équation, que de donner une valeur arbitraire à une des inconnues, et déterminer ensuite la valeur de l'autre inconnue par les règles ordinaires.

Si l'on admet indéfiniment pour x et y des valeurs positives, négatives, entières ou fractionnaires, il est clair que ces sortes de problêmes sont susceptibles d'une infinité de solutions, mais si l'on ne veut que des solutions en nombres entiers positifs, le nombre en est ordinairement limité, et il est facile en général de le déterminer.

Soit l'équation $ax - by = \pm c$, laquelle renferme la solution de tout problème indéterminé du premier degré. Je suppose les nombres a et b premiers entre eux; car s'ils avoient un facteur commun, il est visible que l'équation ne sauroit subsister, à moins que c lui-même ne fût divisible par ce facteur, et dans ce cas, on le feroit disparoître par la division.

L'équation étant ainsi préparée, nous allons démontrer que si on connoît les plus petites valeurs de x et y, qui satisfont à l'équation en nombres entiers, les autres valeurs seront dans une progression arithmétique, dont la différence sera donnée pour les valeurs de x, par le coefficient de y, et pour les valeurs de y, par le coefficient de x.

En effet, supposons que p et q soient les plus petites valeurs de x et y, qui satisfont à l'équation; on aura l'équation générale . . . $ax = by \pm c$, et l'équation particulière $ap = bq \pm c$. Retranchant celle-ci de la première, on éliminera c, et l'on aura

$ax - ap = by - bq$, ou $\frac{a}{b} = \frac{y-q}{x-p}$. Or, a et b sont des nombres premiers entr'eux; donc la première fraction est réduite à ses moindres termes: et il est visible qu'on aura la solution la plus simple, en pre-

nant $y - q = a$, et $x - p = b$; mais comme une fraction demeure la même en multipliant le numérateur et le dénominateur par le même nombre, il est visible qu'on pourra prendre aussi $y - q = na$, et $x - p = nb$, ou $y = q + na$, et $x = p + nb$, n étant un nombre quelconque qu'il faudra supposer entier, pour que x et y soient entiers.

Si nous donnons à n toutes les valeurs successives des nombres naturels, en commençant par o, on aura les valeurs suivantes de x et y.

$$x = p,\ p + b,\ p + 2b,\ p + 3b,\ p + 4b \ldots p + nb.$$
$$y = q,\ q + a,\ q + 2a,\ q + 3a,\ q + 4a \ldots q + na.$$

Or, ces différentes solutions forment des progressions arithmétiques, dont la différence est b pour la première et a pour la seconde; il ne reste donc qu'à déterminer p et q, ce qui va faire l'objet des problêmes suivans.

98. *Problême premier.* Trouver les plus petites valeurs entières et positives de x et y, qui satisfassent à l'équation $47x = 68y + 13$.

Solution. On mettra d'abord l'équation sous la forme suivante, $x = \frac{68y + 13}{47}$ (1), effectuant la division autant que cela est possible... $x = y + \frac{21y + 13}{47}$. Pour satisfaire à la condition que x et y soient des entiers, il faut nécessairement que $\frac{21y + 13}{47}$ soit un entier...; car un entier, plus une fraction, ne donneroient jamais un entier.

Représentons ce dernier terme par la lettre majuscule E, laquelle désignera une quantité indéterminée, mais soumise à la condition qu'elle ait un

entier : on aura donc l'équation $\frac{21y+13}{47}=E$, ou $21y=47E-13$.. $y=2E+\frac{5E-13}{21}$ (2).... y étant un entier, il faut que la dernière expression fractionnaire soit un entier, que nous désignerons par E': on aura donc $\frac{5E-13}{21}=E'$... et $5E=21E'+13$; donc $E=4E'+2+\frac{E'+3}{5}$ (3).

Pour que E soit un entier, il faut que $\frac{E'+3}{5}$ en soit un, que nous désignerons par E''; donc $E'+3=5E''$... et $E'=5E''-3$ (4).

Or, dans cette dernière équation, on apperçoit facilement que la plus petite valeur qu'il faut donner à E'', pour que E' soit un entier positif, est 1... Dans ce cas, $E'=2$, remontant à l'équation (3), $E=11$... l'équation (2) donne $y=24$; enfin l'équation (1) donne $x=35$; donc 24 et 35 sont les deux plus petites valeurs qu'on puisse donner à x et y, pour satisfaire à l'équation proposée.

Remarque première. En considérant attentivement l'équation (1), on voit que le problême n'auroit pas de difficulté si le nombre 13 ne s'y trouvoit pas, ou si x n'avoit d'autre coefficient que l'unité. Par la méthode que nous avons suivie, on introduit successivement une nouvelle inconnue dans le calcul et une nouvelle équation, en sorte que le problême reste toujours indéterminé : mais de cette manière, le coefficient d'une des deux inconnues diminue successivement, et ne peut pas manquer de devenir égal à 1, comme dans l'équation (4).

Remarque deuxième. Il est utile de remarquer

que, pour transformer l'équation donnée en une autre dans laquelle une des inconnues n'ait que l'unité pour coefficient, on a divisé dans l'équation (1) 68 par 47; le quotient est 1, avec un reste 21 : dans l'équation (2), on a divisé 47 par 21; le quotient est 2, avec un reste 5 : dans l'équation (3), on a divisé 21 par 5; le quotient est 4, avec un reste 1 : or il est visible que cette méthode est la même que celle qu'on emploie pour trouver le plus grand commun diviseur entre deux nombres donnés (27), et comme, par la nature de la question, les deux nombres doivent être premiers entr'eux (97), il est clair qu'ils n'auront d'autre commun diviseur que l'unité. Donnons encore un exemple.

99. *Problème second.* Trouver les plus petites valeurs entières et positives de x et y, qui satisfont à l'équation $835x = 2866y - 7$.

Solution. En opérant comme dans le problême précédent, on a $x = \frac{2866y - 7}{835} = 3y + \frac{361y - 7}{835}$. Soit cette expression fractionnaire égale à un entier E; donc $y = \frac{835E + 7}{361} = 2E + \frac{113E + 7}{361}$... Cette dernière expression $= E'$; donc $E = \frac{361E' - 7}{113} = 3E' + \frac{22E' - 7}{113}$. Soit cette dernière expression fractionnaire $= E''$..; donc $E' = \frac{113E'' + 7}{22} = 5E'' + \frac{3E'' + 7}{22}$.... Par la même raison, $E'' = \frac{22E''' - 7}{3} = 7E''' - 2 + \frac{E''' - 1}{3}$... On voit évidemment qu'en

supposant $E'''=1$, la dernière fraction devient zéro, et $E''=5\ldots E'=26\ldots\ E=83,\ y=192\ldots\ x=659$: donc 192 et 659 sont les deux plus petites valeurs de y et x, qui satisfont à l'équation donnée.

Remarque troisième. Nous avons déjà remarqué que la méthode pour trouver les plus petites valeurs de y et x, est la même que celle qu'on suit pour trouver le plus grand commun diviseur entre les deux coefficiens de x et y. Mais cette dernière a beaucoup de rapport avec celle des fractions continues (34). Nous pouvons donc déduire la solution générale des équations indéterminées du premier degré, des propriétés connues de ces sortes de fractions. En effet, soit l'équation générale $ax=by\pm c$, ou $ax-by=\pm c$. Faisons $x=pc$, $y=qc$, l'équation deviendra $ap-bq=\pm 1$; en sorte que celui qui saura résoudre celle-ci, saura aussi résoudre la première. Or, si on a la fraction simple $\frac{a}{b}$ réduite à la plus simple expression, et qu'après l'avoir convertie en fraction continue, on représente les fractions successives qui donnent par approximation la valeur de la fraction continue, par $\frac{d}{e}, \ldots \frac{n}{m}, \frac{q}{p}, \frac{a}{b}$, on a généralement $ap-bq=\pm 1$ (38); donc on peut regarder q et p, dans l'équation à résoudre, comme les deux termes de l'avant-dernière fraction approximative, que l'on obtiendroit en réduisant $\frac{a}{b}$ en fraction continue, q et p étant déterminés; qu'on multiplie l'équation par c, on aura $acp-bcp=\pm c$. Cette équation étant retranchée de la proposée $ax-by=\pm c$, on aura $a(x-pc)-b(y-qc)=o$, ou $\frac{na}{nb}=\frac{y-qc}{x-pc}$, laquelle donnera sur-le-champ

$y=na+qc$, $x=nb+pc$, n étant un nombre entier positif ou négatif.

Remarque quatrième. On peut regarder l'équation $ap-bq=\pm 1$, comme une équation de condition qui doit toujours avoir lieu, pour que les coefficiens a et b soient premiers entr'eux; et si l'équation à résoudre étoit $ax+by=\pm c$, on feroit $y=-z$, ce qui changeroit l'équation en $ax-bz=\pm c$. En retranchant l'équation de condition de celle-ci, on auroit, comme ci-dessus, $a(x-pc)-b(z-qc)=o$, ce qui donneroit $z=na+qc$, et par conséquent $y=-na-qc$, q devant être négatif : les valeurs de y seroient donc données par une progression décroissante, qui ne tarderoit pas à devenir négative; et alors le nombre des solutions est limité.

100. ***Problême troisième.*** Une personne doit à une autre 31 fr., et n'a, pour la payer, que des piastres de 5 fr.; celle-ci ne peut lui rendre que des écus de 6 fr. : on demande comment elles s'arrangeront pour effectuer le paiement.

Solution. La première donnera un nombre inconnu de piastres, et l'autre lui rendra un nombre inconnu d'écus de 6 fr. Soit x le nombre des piastres que la première donnera, y le nombre d'écus donnés par la seconde; chaque piastre vaut 5 fr.; donc le premier donnera $5x$, et l'autre lui rendra $6y$; par cet arrangement, le premier aura payé 31 fr. : donc la traduction algébrique de l'énoncé de la question, sera $5x-6y=31$.... Comparant cette équation avec la formule générale, on aura $a=5$, $b=6$ et $c=31$. L'on déterminera p et q par l'équation de condition $ap-bq=-1$, ce qui donne $p=1$...$q=1$: donc on a généralement $x=6n-31$... $y=5n-31$. La plus petite valeur qu'on puisse donner à n, pour que x et y soient des nombres entiers

tiers positifs, est $n=7$; on a alors $y=4$ et $x=11$; donc on effectuera le paiement en donnant 11 piastres, et recevant en échange 4 écus de 6 fr.

Les autres valeurs de x et y qui satisfont à l'équation, sont données par deux progressions arithmétiques, qui vont à l'infini, et dont la différence est 6 pour les valeurs de x, et 5 pour les valeurs de y.

Les valeurs de x seront 11..17..23..29..35..41...
Celles de y. . . . . 4.. 9..14..19..24..29...

101. *Problème quatrième.* Une fruitière a dans son panier 100 oranges de différentes qualités, sans savoir précisément le nombre de chaque espèce : elle se rappelle qu'en comptant celles de la première qualité par huitaine, il en restoit 7; et comptant celles de la seconde par dixaine, il en restoit encore 7: combien en a-t-elle de chaque qualité ?

Solution. Soit x le nombre d'oranges de la première qualité, et y celles de la seconde... La première condition à remplir, est que la somme des deux qualités soit 100... donc $x+y=100$: la seconde, que le nombre d'oranges de la première qualité, divisé par 8, donne un quotient inconnu z, plus 7... ou $x=8z+7$... Par la même raison, $y=10u+7$; donc on a... $8z+10u+14=100$... ou $8z+10u=86$... Divisant tout par 2... $4z+5u=43$.

En comparant cette équation à l'équation générale, on trouve $a=4$... $b=5$, $c=43$, et p et q seront donnés par l'équation $4p-5q=\pm1$, ce qui donnera $p=1$... $q=1$: donc on aura généralement $z=5n-43$... $u=43-4n$... La plus petite valeur a donnée à n, pour que z et u soient des entiers positifs, est $n=9$, ce qui donne $z=2$... $u=7$; donc $x=23$... $y=77$. Le problême n'est susceptible que de cette solution; parce que, si on donnoit une autre valeur à n, u deviendroit négatif.

102. *Problème cinquième*. De combien de manières pourroit-on faire 120 fr. en 120 pièces de 300 cent., de 120 cent. et de 60 cent.?

Solution. Soit x le nombre de pièces de 300 cent. (60 sous), y le nombre des pièces de 120 cent. (24 s.), z le nombre des pièces de 60 cent. (12 s.). La première condition à remplir, est que le nombre total des pièces soit égal à 120; donc $x+y+z=120$... La seconde condition à remplir, est que la valeur de toutes ces pièces soit 120 fr., ou 12000 cent.: donc $300x+120y+60z=12000$, ou, en divisant par 60, $5x+2y+z=200$. Retranchant la première équation de celle-ci, il reste... $4x+y=80$: donc $x=20-\frac{y}{4}$... La plus petite valeur à donner à y, pour que x soit un entier, est 4: on trouve ainsi $x=19$... $z=97$. En éliminant y des deux premières équations, on trouve $z-3x=40$. Cette équation, avec la précédente $4x+y=80$, nous apprend que les valeurs de y vont en croissant de 4, celles de x en diminuant de 1, et celles de z en diminuant de 3. Il y aura donc en tout 19 solutions en nombres entiers; savoir:

$x=$ 19..18..17..16..15..14..... 1.
$y=$ 4.. 8..12..16..20..24..... 76.
$z=$ 97..94..91..88..85..82..... 43.

103. *Conclusion.* La théorie des problèmes indéterminés du premier degré, nous apprend qu'on peut satisfaire à ces sortes de questions d'un nombre infini de manières. On se contente ordinairement de chercher les solutions en nombres entiers positifs, et pour lors le nombre en est limité. Pour trouver toutes les solutions en nombres entiers positifs, il suffit d'en connoître une, parce qu'il est démontré que toutes les autres sont données par des

progressions arithmétiques, dont la différence est connue. Enfin, la méthode employée pour trouver une solution, se réduit à satisfaire à une équation de condition, donnée par la théorie des fractions continues.

Le premier auteur qui ait donné un ouvrage sur cette matière, est Diophante; aussi appelle-t-on ce genre d'analyse, analyse de Diophante : on en trouve les principes dans les Commentaires sur Diophante, par Bachet. Plusieurs géomètres célèbres du dernier siècle s'en occupèrent avec succès; mais c'est principalement aux travaux d'Euler et de la Grange qu'elle doit la généralité, la perfection et l'élégance de ses procédés, comme on peut le voir dans le second volume des Elémens d'algèbre d'Euler, où l'on trouvera une théorie complète de cette partie de l'algèbre.

De la résolution des problémes indéterminés du second degré.

104. Toute équation du second degré, pour être résolue, demande une extraction des racines. Prenons donc l'équation la plus générale du second degré à deux inconnues, et nous aurons $y^2+bxy+cx^2+dy+fx+g=o$, qu'on peut mettre sous la forme suivante $y^2+(bx+d)y=-cx^2-fx-g$. Si nous traitons y comme inconnue, et x comme quantité connue, nous aurons, après avoir complété le quarré, et extrait la racine... $y=-\left(\frac{bx+d}{2}\right)$ $\pm\sqrt{\left(\frac{bx+d}{2}\right)^2-cx^2-fx-g}$, laquelle pourra se mettre sous la forme suivante, après avoir fait les réductions convenables, $y=A\pm\sqrt{m+px+qx^2}$. Pour avoir la valeur de y en quantités rationnelles,

il faut trouver les valeurs rationnelles de x qui peuvent rendre rationnel ce radical.

Soit $\sqrt{m+px+qx^2}=z$. On aura $z^2-m=qx^2+px$.... ou $x+\frac{p}{2q}=\pm\sqrt{\frac{z^2-m}{q}+\frac{p^2}{4q^2}}$.... et $2qx+p=\pm\sqrt{4qz^2+p^2-4mq}$.

Ce dernier radical peut se mettre sous la forme $\sqrt{A^2Z^2+B}$; donc pour avoir les valeurs de x et y en quantités rationnelles, il suffit de pouvoir rendre rationnels les radicaux de la forme $\sqrt{AZ^2+B}$. La résolution générale de l'équation $u=\sqrt{AZ^2+B}$, renferme de grandes difficultés. Si on veut se contenter de solutions particulières, on les trouvera: 1°. lorsque A est un quarré, 2°. lorsque B est un quarré, 3°. lorsque AZ^2+B peut être décomposé en deux facteurs rationnels.

La solution de tous ces cas particuliers nous mèneroit trop loin, et n'est pas d'ailleurs d'une utilité immédiate dans les questions élémentaires de l'algèbre. Nous nous contenterons de renvoyer aux élémens d'algèbre d'Euler déjà cités. Le lecteur y trouvera, dans les additions de la Grange, tout ce qu'il pourra desirer dans une partie aussi importante de l'analyse.

Des rapports, proportions et progressions.

105. Quoique la théorie des rapports, proportions et progressions, ait été traitée avec assez d'étendue dans l'arithmétique, il ne sera pas inutile d'en traduire ici les principaux théorêmes en formules algébriques, qui auront l'avantage de donner plus de développement et de généralité aux démonstrations faites sur des exemples particu-

liers. En lisant cet article, on doit avoir sous les yeux les numéros correspondans de l'arithmétique, auxquels nous renverrons souvent pour éviter les répétitions.

Dans tout rapport arithmétique, le conséquent est égal à l'antécédent augmenté ou diminué de la différence (Arith. 120). Or, tout antécédent peut être représenté par a; la différence, quelle qu'elle soit, peut être représentée par d: donc tout rapport arithmétique sera représenté par $a \pm d$.

Si l'on a un second rapport égal au premier, et que son antécédent soit représenté par c, son conséquent sera représenté par $c \pm d$; donc toute proportion arithmétique peut être représentée par la formule générale $a . a \pm d \cdot\!\cdot c . c \pm d$... Or, il est visible que dans cette formule la somme des extrêmes est $a + c \pm d$, et la somme des moyens, $a + c \pm d$ (Arith. 125) : donc, &c.

On voit encore, d'une manière sensible, que, si l'on ajoute ensemble deux proportions arithmétiques, les sommes formeront une autre proportion arithmétique (Arith. 129). Car soient les deux proportions arithmétiques $\begin{matrix} a . a \pm d \cdot\!\cdot c . c \pm d \\ m . m \pm p \cdot\!\cdot n . n \pm p \end{matrix}$, en les ajoutant, on aura $a + m : a + m \pm d \pm p \cdot\!\cdot c + n . c + n \pm d \pm p$, ce qui forme une proportion arithmétique, puisque la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens.

On démontre aussi avec la même facilité la proposition du numéro 127 de l'Arithmét. En effet, soient les deux rapports inégaux $a . a + d$, $b . b + m$. Il est visible qu'on aura $a + b + m . a + b + d \cdot\!\cdot m . d$; car la somme des moyens est égale à celle des extrêmes. Si les conséquens étoient plus petits que les antécédens, on auroit, par la même raison, $a + b - m . a + b - d \cdot\!\cdot d . m$.

106. Dans tout rapport géométrique, le conséquent est égal à l'antécédent multiplié par la raison (Arith. 122); or, tout antécédent peut être représenté par a; la raison, quelle qu'elle soit, entière ou fractionnaire, peut être représentée par q: donc tout rapport géométrique sera représenté par $a:aq$.

Si l'on a un second rapport géométrique égal au premier, en représentant par b son antécédent, son conséquent sera représenté par bq: donc la formule générale, représentant toute proportion géométrique, sera $a:aq :: b:bq$. Or, il est visible que, dans cette formule, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens: car $abq = abq$; donc, &c.

Toute proportion peut fournir une équation. Car si l'on a la proportion $a:b :: c:x$, on en conclut $ax = bc$; et réciproquement toute équation peut donner une proportion; car si on a l'équation $am = pn$, ou $a = \frac{pn}{m}$, on en peut conclure $a:p :: n:m$.

L'on s'assurera de la vérité de la proposition (Arith. 133), en prenant les deux rapports inégaux $a:ap.b:bq$, avec lesquels on pourra former la proportion $abq:abp :: q:p$; car le produit des extrêmes sera égal au produit des moyens.

107. Dans toute proportion géométrique, la somme des antécédens est à la somme des conséquens, comme un seul antécédent est à son conséquent (Arith. 137); car le premier rapport de la formule générale est exprimé par $\frac{aq}{a}$, et le second par $\frac{bq}{b}q$; mais l'on a aussi $\frac{aq+bq}{a+b} = q = \frac{aq}{a}$: donc on peut former la proportion $a+b : aq+bq :: a : aq$.

On peut rendre cette proposition plus générale,

en disant que, si l'on a une suite de rapports égaux, tels que $a:b::c:d::e:f::g:h$, &c. la somme d'un nombre quelconque d'antécédens, est à la somme d'un pareil nombre de conséquens, comme un antécédent est à son conséquent. Car soit $\frac{a}{b}=q$, $\frac{c}{d}=q$, $\frac{e}{f}=q$, $\frac{g}{h}=q$, on aura $a=bq$, $c=dq$, $e=fq$, $g=hq$, et $\frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}=q=\frac{a}{b}$.... On peut donc dire que, quand on a un nombre de fractions égales, la somme des numérateurs, divisée par la somme des dénominateurs, formera une fraction égale aux premières.

108. Si l'on a plusieurs proportions, et qu'on les multiplie, ou qu'on les divise par ordre, les produits ou les quotiens seront en proportion (Arith. 138). Car soient les deux proportions $\begin{matrix} a:aq::b:bq \\ c:cp::d:dp \end{matrix}$. En les multipliant par ordre, on aura celle-ci $ac:acpq::bd:bdpq$, dans laquelle le produit des extrêmes est égal à celui des moyens : il en seroit de même si on les avoit divisées.

Si les proportions étoient identiques, c'est-à-dire, égales terme à terme, on auroit $a^2:a^2q^2::b^2:b^2q^2$; donc, lorsqu'on a quatre termes en proportion, leurs quarrés sont en proportion. On démontreroit également pour le cube, en multipliant la proportion des quarrés par celle des racines; et ainsi des autres puissances : c'est-à-dire que de la proportion $a:aq::b:bq$, on déduit celle-ci $a^m:a^mq^m::b^m:b^mq^m$; et par la même raison $a^{\frac{1}{m}}:b^{\frac{1}{m}}::a^{\frac{1}{m}}q^{\frac{1}{m}}:b^{\frac{1}{m}}q^{\frac{1}{m}}$, ou $\sqrt[m]{a}:\sqrt[m]{aq}::\sqrt[m]{b}:\sqrt[m]{bq}$.

Si la proportion étoit continue, elle seroit repré-

sentée par $a : aq :: aq : aq^2$; et l'on auroit le produit des extrêmes égal au quarré du moyen terme; en sorte que de la proportion $\div a : x : b$, on tire l'équation $x^2 = ab$... et $x = \sqrt{ab}$; et réciproquement de cette dernière équation, on peut former une équation.

Telles sont les propriétés générales des proportions : quant aux applications de ces propriétés, elles ont été faites dans l'arithmétique (141 *et suiv.*). Nous nous contenterons d'éclaircir ici quelques articles.

Règle de société.

109. La règle de société peut être traitée par l'analyse, en mettant le problême en équations. Supposons trois associés A, B, C; le premier met en société la somme a, le second la somme b, et le troisième la somme c : ils gagnent la somme m, qu'il s'agit de partager proportionnellement aux mises.

Soit x la part du premier, y celle du second, z celle du troisième : il est visible que la part du second est à celle du premier :: $b : a$... donc $y = \frac{bx}{a}$, et $z = \frac{cx}{a}$: or les trois portions réunies doivent égaler le gain total; donc $x + \frac{bx}{a} + \frac{cx}{a} = m$... et $x = \frac{am}{a+b+c}$. On trouvera $y = \frac{bm}{a+b+c}$.... $z = \frac{cm}{a+b+c}$. Ces équations peuvent se mettre sous la forme d'une proportion...

$$a + b + c : m :: \begin{cases} a : x \\ b : y \\ c : z \end{cases}$$

ce qui est conforme à ce que l'on a trouvé (Arith. 144).

Pour donner un exemple d'une règle de société composée, supposons deux associés A et B : le premier met au premier vendémiaire la somme a, et au premier nivôse la somme b; le second met au premier vendémiaire la somme c, et au premier germinal la somme d : au bout de 15 mois ils ont gagné la somme m, qu'il faut partager proportionnellement aux mises et au temps.

Il est visible que la mise de chacun peut être considérée comme un fonds qui produit pendant tout le temps qu'il reste dans la société. Elle peut donc être regardée comme de l'argent placé à un certain denier inconnu, et dont la valeur dépend du gain total m, et du temps que les sommes placées sont restées dans la société.

Soit x l'intérêt d'une livre pour un mois, $15ax$ sera l'intérêt de la somme a pour 15 mois; par la même raison, $12bx$ sera l'intérêt de la somme b pour 12 mois; $15cx$ et $9dx$ représenteront les intérêts dus aux sommes c et d. Or, par la supposition, la somme de ces intérêts doit égaler m; donc on a l'équation $(15a+15c+12b+9d)x=m$, et $x=\frac{m}{15a+15c+12b+9d}$... donc $15ax+12bx$, ou le gain de $A=\frac{m(15a+12b)}{15a+15c+12b+9d}$. Or, cette équation donne la proportion énoncée (Arith. 145)...

Règle d'intérêt et d'escompte.

110. Dans toutes les questions relatives à l'intérêt, il y a cinq choses à considérer (Arith. 146), 1°. le capital que nous désignerons par a; 2°. le nombre arbitraire, mais communément 100, sur lequel on suppose que se prend l'intérêt, et que nous

représenterons par d; 3°. le taux, ou le denier de l'intérêt exprimé par i; 4°. le temps que le capital a été gardé représenté par t; 5°. enfin la somme rendue au bout du temps, tant en intérêts qu'en capitaux, nous l'exprimerons par s... Cela posé, on aura l'intérêt d'un an en faisant la proportion $d:a::i:x=\frac{ai}{d}$; multipliant par t, on a $\frac{ait}{d}$ pour l'intérêt total : ajoutant le capital a, ou $\frac{ad}{d}$, on a $s=a\left(\frac{d+it}{d}\right)$. C'est la formule générale renfermant les cinq élémens qui peuvent se rencontrer dans la règle d'intérêt. Si de ces cinq élémens on en connoît quatre, il sera facile de connoître le cinquième par les règles de l'analyse. Elles donneront les cinq formules suivantes :

$$1°\ldots s=a\left(\frac{d+it}{d}\right),$$

$$2°\ldots a=\frac{ds}{d+it},$$

$$3°\ldots i=d\left(\frac{s-a}{at}\right),$$

$$4°\ldots t=d\left(\frac{s-a}{ai}\right),$$

$$5°\ldots d=\frac{ait}{s-a}.$$

Exemple premier. Une personne a prêté 12000 fr. à 4,5 pour $\frac{0}{0}$ d'intérêt ; à combien montent intérêt et capital pour 5 ans ?

On a ici $a=12000$ fr... $d=100$... $i=4,5$... $t=5$; donc on aura $s=12000\left(\frac{100+22,5}{100}\right)=14700$ fr.

Exemple second. Une personne ayant gardé 800 fr. pendant un certain temps, rend 998 fr. pour capital et intérêt à 4,5 pour $\frac{0}{0}$; combien d'années l'argent a-t-il été gardé ?

En faisant les substitutions convenables dans la quatrième formule, on trouvera $t = 100 \left(\frac{198}{3600}\right) = 5,5$; donc l'argent a été gardé cinq ans et six mois.

On a vu (Arith. 147) que pour que l'escompte soit équitable, il doit être pris en dehors. En conservant les mêmes dénominations que ci-dessus, on aura pour un nombre d'années $t \ldots d + it : a :: it : x = \frac{ait}{d+it}$. Donc la somme à recevoir, ou $S = a - \frac{ait}{d+it} = \frac{ad}{d+it}$. Cette formule ne diffère de celle que nous venons de trouver, n°. 1, qu'en ce que S est à la place de a, et réciproquement: ou, ce qui est la même chose, il suffit de renverser la fraction $\frac{d}{d+it}$. On en tirera donc des formules analogues, pour déterminer les autres élémens.

Veut-on déterminer l'escompte par une méthode plus analytique ? on dira : Quel que soit l'escompte que j'appelle x, il doit être tel, qu'après le nombre d'années t, le créancier et le débiteur se trouvent dans la même position, en faisant valoir leur argent, que s'ils n'avoient pas escompté. Le créancier recevra donc en capital $a - x$.... L'intérêt de cette somme, pendant un nombre t d'années, sera $(a-x)\frac{it}{d}$. Donc, à cette époque, le capital escompté aug-

menté de l'intérêt, seroit $(a-x)\left(\frac{d+it}{d}\right)$; mais si la somme n'eût pas été escomptée, le créancier auroit reçu a; donc $(a-x)\left(\frac{d+it}{d}\right)=a$, ce qui donne $x=\frac{ait}{d+it}$, comme ci-dessus.

Règle de double fausse position.

111. On a vu (Arith. 150) que ce qui empêche qu'une seule supposition ne mène à la solution de ces sortes de questions, c'est principalement les quantités constantes qui, ajoutées ou retranchées avec les parts qu'il s'agit de déterminer, troublent la proportion existante entre les parties aliquotes des deux nombres; mais ces quantités constantes disparoîtront, en faisant une première supposition, et retranchant l'équation qui en résultera de l'équation à résoudre.

Soit l'équation à résoudre $\frac{x}{m}+\frac{x}{n}+p=a$... Je suppose $x=s$: il en résultera une erreur que je représente par e; on aura donc l'équation $\frac{s}{m}+\frac{s}{n}+p=a+e$. Cette équation, retranchée de la première, donne $(x-s)\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)=-e$.

Je fais une seconde supposition s', qui donnera une seconde erreur, positive ou négative, représentée par e', on aura une seconde équation $(x-s')\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)=-e'$. Ces deux équations donnent la proportion... $e:e'::x-s:x-s'$, ou $e-e':s'-$

$s :: e : x - s$; or, cette proportion est celle du n°. 150 (Arith.). Donc, &c.

Toutes les équations du premier degré, et à une seule inconnue, peuvent se résoudre par la règle de double fausse position ; car soit l'équation générale du premier degré $Ax = B$ ... une première supposition donnera $As = B \pm e$; soustraite de la première, on a $A(x - s) = \mp e$... une seconde supposition donnera $As' = B \pm e$: et en la retranchant de la première $A(x - s) = \mp e'$..... Les deux équations, divisées l'une par l'autre, donneront $\frac{x-s}{x-s'} = \frac{e}{e'}$, ce qui donne $x = \frac{es' - e's}{e - e}$.

Des progressions arithmétiques.

112. Dans toute progression arithmétique, un terme quelconque est égal à celui qui le précède, augmenté ou diminué de la différence (Arith. 154). Donc, si le premier terme est représenté par a, la différence par d, le second terme sera $a \pm d$; le troisième $a \pm 2d$; le quatrième $a \pm 3d$... et ainsi des autres. Donc la formule générale représentant toute progression arithmétique composée de n termes, sera :

$$a . a \pm d . a \pm 2d . a \pm 3d . a \pm 4d . a \pm 5d ... a \pm (n-1)d$$

Cette formule nous apprend que *le terme général d'une progression arithmétique, est égal au premier terme de la progression, augmenté ou diminué de la différence commune, multipliée par le nombre des termes qui le précèdent* (Arith. 155).

Ainsi, si l'on représente par x le terme du rang n, on a $x = a \pm (n-1)d = a \pm dn \mp d$.

Dans la suite, nous ne considérerons que les pro-

gressions croissantes ; ainsi nous ne prendrons que le signe supérieur.

113. Dans toute progression arithmétique, la somme des extrêmes est égale à la somme des deux termes, également éloignés des extrêmes (Arith. 156); car la somme des extrêmes est $2a+dn-d$; et la somme des deux termes également éloignés des extrêmes est $2a+dn-d$.

La somme de tous les termes d'une progression arithmétique, est égale à la somme des extrêmes multipliée par la moitié du nombre des termes (Arith. 157); car la somme du premier et du dernier est égale à celle du second et de l'avant-dernier, à celle du troisième et de l'anté-pénultième, &c. Donc, la somme totale sera égale à une de ces sommes partielles, répétée autant de fois qu'il y a d'unités dans la moitié du nombre des termes.

Soit a le premier terme, x le dernier, n le nombre, s la somme; on aura $s=(a+x)\frac{n}{2}$.

Cette dernière formule, avec la précédente... $x=a+dn-d$, suffisent pour résoudre le problême suivant, dans toute sa généralité : *De cinq élémens qui entrent dans une progression arithmétique, savoir : le premier terme* a, *le dernier* x, *le nombre des termes* n, *la somme de tous* s, *la différence* d ; *si l'on en connoît trois, on peut facilement trouver les deux autres ;* car les deux formules contiennent les cinq élémens. Or, si on en connoît trois, la question est réduite à résoudre un problême à deux inconnues, par le moyen de deux équations ; ce qui ne peut souffrir de difficulté.

Chacune des deux formules précédentes en fournit quatre différentes, savoir, la première :

$(1)\ldots x=a+dn-d\ldots(2)\ldots a=x-dn+d\ldots$

$(3)\ldots d=\frac{x-a}{n-1}\ldots(4)\ldots n=\frac{x+a}{d}+1.$

La seconde :

$(1)\ldots s=(a+x)\frac{n}{2}\ldots(2)\ldots a=\frac{2s}{n}-x\ldots.$

$(3)\ x=\frac{2s}{n}-a\ldots$

$(4)\ldots n=\frac{2s}{a+x}.$

Ces huit formules, jointes à celles qui résultent des combinaisons des quatre premières avec les quatre dernières, en formeront vingt différentes, qui résoudront le problême dans tous les cas possibles.

114. *Problême premier.* Un particulier a dans son jardin une allée de cent arbres, éloignés l'un de l'autre de trois mètres. Il charge un ouvrier de prendre de la terre à un monceau éloigné du premier arbre de douze mètres; d'aller en porter une brouettée au pied de chaque arbre, et de ramener la brouette au monceau. Combien de mètres doit faire celui qui entreprendra cet ouvrage ?

Solution. Pour aller au premier arbre et ramener la brouette au monceau, il fera 24 mètres; pour aller au second et ramener la brouette, il en fera 30, et ainsi de suite, en augmentant toujours de 6.

C'est donc une progression arithmétique dont on connoît le premier terme 24, la différence 6, le nombre des termes 100, et dont on demande la somme s.

Commençons par chercher le dernier.... $x=24+594=618$.

Donc $s=(24+618)\frac{100}{2}=32100$ mètres.

115. *Problême deuxième.* Deux voyageurs partent au même instant de deux termes opposés, distans de 135 myriamètres, et viennent à la rencontre l'un de l'autre. La marche du premier étant règlée sur cette progression arithmétique 1.5..9..., et celle du second sur les termes de celle-ci 4..7..10, on demande, 1°. quel jour ils se rencontreront; 2°. ce que chacun aura fait de chemin.

Solution. Les deux voyageurs doivent marcher un égal nombre de jours; et lorsqu'ils se rencontreront, le chemin fait par les deux doit être en somme de 135 myriamètres. Soit n, le nombre de jours; le premier voyageur fera dans le dernier jour $1+4(n-1)=4n-3$ myriamètres; donc il fera en total $s=(4n-2)\frac{n}{2}=2n^2-n$; le second fera le dernier jour $4+3(n-1)=3n+1$: et au total $s'=(3n+5)\frac{n}{2}=\frac{3n^2+5n}{2}$. Donc, $2n^2-n+\frac{3n^2+5n}{2}=135$... ou $7n^2+3n=270$, et $n^2+\frac{3}{7}n=\frac{270}{7}$... Donc $n=-\frac{3}{14}\pm\sqrt{\frac{270}{7}+\frac{9}{196}}=-\frac{3}{14}\pm\frac{87}{14}=6$ jours. Donc, 1°. les deux voyageurs ne se rencontreront qu'après 6 jours de marche. 2°. Le chemin fait par le premier, sera $s=2\times36-6=66$ myriamètres; et le chemin fait par le second, sera $s'=\frac{108+30}{2}=69$ myriamètres.

Des progressions géométriques.

116. Dans toute progression géométrique, un terme quelconque est égal à celui qui le précède, multiplié par le quotient (Arithmétique, n°. 159). Donc, si le premier terme est a, et le quotient q, le second terme sera aq; par la même raison, le troisième

troisième sera $a\,q^2$, le quatrième $a\,q^3$, et ainsi des autres. Donc la formule générale représentant toutes les progressions géométriques, composées de n termes, sera... $a{:}aq{:}aq^2{:}aq^3{:}aq^4{:}aq{:}^5aq^6\ldots{:}aq^{n-1}$.

117. Si la progression est décroissante, on fera $q=\frac{1}{m}$, m étant un nombre entier positif, et la formule deviendra...

$$a:\frac{a}{m}:\frac{a}{m^2}:\frac{a}{m^3}:\frac{a}{m^4}:\frac{a}{m^5}:\frac{a}{m^6}\ldots\ldots\frac{a}{m^{n-1}}:$$

On voit par ces deux formules, *que le dernier terme d'une progression géométrique est égal au premier, multiplié par le quotient, élevé à une puissance marquée par le nombre des termes qui précèdent* (Arith. 160). Ainsi, si l'on représente le dernier terme par x, le premier étant a, le quotient q, et le nombre des termes n, on aura pour les progressions croissantes $x=aq^{n-1}$,... et pour les progressions décroissantes $x=\frac{a}{m^{n-1}}$.

118. *Dans toute progression géométrique, la somme de tous les termes est égale au dernier terme de la progression, multiplié par le quotient, le produit devant être diminué du premier terme, et le tout divisé par le quotient, diminué de l'unité* (Arith. 163). Car si on représente par s la somme totale, il est visible qu'on aura $s=a+aq+aq^2+aq^3+aq^4\ldots\ldots+aq^{n-1}\ldots$ Cette équation, étant multipliée par q, on aura $sq=aq+aq^2+aq^3$ $aq^4+aq^5\ldots+aq^n\ldots$ Retranchant la première de celle-ci, on a $sq-s=aq^n-a$. Divisant par $q-1$,...
$s=\frac{aq^n-a}{q-1}=\frac{qx-a}{q-1}$.

Lorsque la progression sera décroissante, on fera $q=\frac{1}{m}$, et la formule deviendra ....

$$s=\frac{\frac{a}{m^n}-a}{\frac{1}{m}-1}=\frac{am\left(1-\frac{1}{m^n}\right)}{m-1}=\frac{am-\frac{a}{m^{n-1}}}{m-1}.$$

On peut encore démontrer la proposition précédente d'une autre manière. Soient les termes successifs de la progression, représentés par les lettres $a, b, c, d, f, g, h, \ldots\ldots u, x$, le quotient étant q; on aura les équations suivantes :.... $b=aq$,.... $c=bq$,.... $d=cq$,.... $f=dq$,..... $g=fq$,... $h=gq$,... $x=uq$...... En ajoutant ces équations, on a $b+c+d+f+g+h+\ldots\ldots+u+x=q\,(a+b+c+d+f+g+h\ldots\ldots+u)$. Or, en nommant s la somme de tous les termes de la progression, on verra facilement que le premier membre de l'équation précédente est représenté par $s-a$, et le second par $q\,(s-x)$... Donc on a $s-a=q\,(s-x)$, d'où on tire $s=\frac{qx-a}{q-1}$, comme ci-dessus.

Cette formule, jointe à celle qui donne le dernier terme, suffit pour résoudre le problême général (Arith. 159), savoir : *De cinq élémens qui entrent dans une progression géométrique, a, x, q, n, s, trois étant donnés, connoître les deux autres ?*

On trouvera ici, comme dans les progressions arithmétiques, vingt formules; mais plusieurs de ces formules dépendent de la théorie des loga-

rithmes, ou des équations composées; c'est pourquoi nous n'en parlons pas ici.

119. On a vu (Arith. 164), que la théorie de l'intérêt composé, dépend des progressions géométriques. Pour généraliser ce que nous en avons dit, supposons qu'un franc placé à intérêt ait augmenté dans un an de $\frac{1}{m}$, on aura à la fin de la première année $1+\frac{1}{m}=\frac{m+1}{m}$. Donc un capital a deviendra dans un an $a\left(\frac{m+1}{m}\right)$; ce qui prouve que pour connoître le capital de chaque année, il faut multiplier celui de l'année précédente par $\frac{m+1}{m}$. Donc on aura à la fin de la seconde année $a\left(\frac{m+1}{m}\right)^2$; à la fin de la 3ᵉ année $a\left(\frac{m+1}{m}\right)^3$, et à la fin de la dernière année, $a\left(\frac{m+1}{m}\right)^n$.

On voit par-là que le capital croîtra successivement, selon les termes d'une progression géométrique, dont le quotient sera $\frac{m+1}{m}$: lorsque l'intérêt est au denier vingt, $m=20$, et le quotient de la progression est $\frac{21}{20}$ (Arith. 164). Si l'intérêt est au denier vingt-cinq, le quotient sera $\frac{26}{25}$.

Pour savoir ce que devient un capital placé à 5 pour $\frac{0}{0}$ par an, d'intérêt composé, au bout de 15 ans, il faudroit multiplier le capital par $\left(\frac{21}{20}\right)^{15}$. Ce dernier calcul seroit assez long à effectuer, par

les règles ordinaires de la multiplication ; par les logarithmes il est de la plus grande facilité ; et l'on trouve $(\frac{21}{20})^{15}=2{,}08$ à-peu-près ; donc le capital fait plus que doubler en 15 années. Si l'intérêt était simple, ce ne seroit qu'au bout de 20 ans qu'il auroit doublé.

Réciproquement puisqu'une somme a, payable actuellement, devient après n d'années, $a\left(\frac{m+1}{m}\right)^n$, l est visible que la même somme qui ne devroit être payée qu'après un nombre n d'années, ne vaut actuellement que $\frac{a}{\left(\frac{m+1}{m}\right)^n}=a\left(\frac{m}{m+1}\right)^n$.

C'est dans cette formule que consiste *l'escompte redoublé*.

120. *Problême premier*. Un particulier achète un bien dont la valeur est a, qu'il s'engage à payer en un nombre n de paiemens égaux, en y comprenant les intérêts exprimés par la fraction $\frac{1}{m}$ du capital : on demande de combien sera chaque paiement ?

Solution. Soit x, la valeur de chaque paiement. A la fin de la 1re année, le débiteur devra, tant en capital qu'en intérêt, $a\left(\frac{1+m}{m}\right)=aq$, (en désignant par q la fraction $\frac{1+m}{m}$). Il paye la somme x; donc il ne devra plus que $aq-x$.

Cette somme deviendra, à la fin de la seconde année, aq^2-qx (119) ; il paie encore x, donc il

ne devra plus que $aq^2 - qx - x$. A la fin de la troisième année, cette somme sera $aq^3 - q^2x - qx$; il paye x, il ne devra plus que $aq^3 - q^2x - qx - x$.

Sans pousser plus loin le raisonnement, on voit qu'à la fin de la dernière année la somme dûe sera représentée par $aq^n - (xq^{n-1} + xq^{n-2} + xq^{n-3} + \ldots + x)$. Ce dernier terme est égal à $\frac{xq^n - x}{q-1}$ (118), et puisque, à cette époque, tout le capital et les intérêts doivent avoir été payés, il s'ensuit que $aq^n - x\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right) = 0$. Donc $x = aq^n\left(\frac{q-1}{q^n-1}\right)$.

121. Si l'on vouloit savoir quelle somme il faudroit placer pour recevoir à la fin de chaque année une somme déterminée, de manière qu'on pût être entièrement remboursé du capital et des intérêts après un nombre n d'années, on traiteroit a comme inconnu, et l'on auroit $a = x\left(\frac{q^n - 1}{q^{n+1} - q^n}\right)$.

Lorsque l'intérêt est à 5 pour $\frac{0}{0}$, $q = \frac{21}{20}$.

Exemple premier. Supposons que le bien acquis soit de 100000 fr., et qu'il doive être soldé en 15 paiemens égaux, y compris les intérêts, on aura $a = 100000$, $n = 15$, et $x = 100000 \times 2{,}08\left(\frac{1}{21{,}6}\right) = 9629{,}62$.

Exemple second. Quelle somme faudroit-il placer, pour recevoir 100 fr. à la fin de chaque année, de manière à être remboursé entièrement du capital et des intérêts dans 24 ans ?

Dans ce cas particulier $x = 100$, $n = 24$, et l'on trouvera, toute réduction faite, $a = 1379$ fr. 85.

Ces deux problêmes renferment la théorie des annuités, si utile dans les villes de commerce.

122. Reprenons la formule des progressions décroissantes $s = \frac{am - \frac{a}{m^{n-1}}}{m-1}$ ..... Il est visible que plus le nombre n deviendra grand, plus le terme $\frac{a}{m^{n-1}}$ deviendra petit, et plus la valeur s approchera de $\frac{am}{m-1}$. Donc, plus on prendra de termes dans la progression décroissante, plus leur somme approchera de $\frac{am}{m-1}$, sans néanmoins pouvoir jamais lui être égale, mais elle n'en pourra différer que d'une quantité plus petite que toute quantité assignable. La formule $s' = \frac{am}{m-1}$, est donc la limite des progressions géométriques décroissantes, comme on va le voir dans les exemples suivans :

Soit la progression géométrique $\div \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} : \frac{1}{32} : \frac{1}{64}$... à l'infini, on a ici $a = \frac{1}{2}$, $m = 2$; donc $s' = \frac{1}{2-1} = 1$. C'est-à-dire que plus on prendra de termes dans cette progression, plus la somme approchera de l'unité (Arith. 163).

Proposons-nous de réduire une fraction décimale périodique, en fraction ordinaire (Arith. 99).

Toute fraction décimale périodique peut se mettre sous la forme suivante $\frac{A}{q^n} + \frac{A}{q^{2n}} + \frac{A}{q^{3n}} + \frac{A}{q^{4n}} + \frac{A}{q^{5n}} \ldots + \frac{A}{q^{\infty n}} \ldots$, ($A$ représentant les chiffres de la période ; $q = 10$, et n le degré de la puissance du dénominateur de la période). Or, la forme précédente

est celle d'une progression géométrique décroissante à l'infini, dont le quotient est $\frac{1}{q^n}$; donc on aura $s' = \frac{A}{q^n - 1}$.

Exemple en nombre. Soit la fraction périodique 0,3333... Cette fraction peut se mettre sous la forme suivante $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000}, \ldots$ &c. Donc on a ici $A = 3$, $n = 1$ et $s' = \frac{3}{10 - 1} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ (Arith. 100).

Soit encore $0{,}262626\ldots = \frac{26}{100} + \frac{26}{10000} + \frac{26}{1000000} \ldots$ On a ici $A = 26$, $n = 2$, $q = 10$; donc $s' = \frac{26}{99}$.

Des coefficiens indéterminés, et de leur usage pour développer les fractions en séries.

123. On a vu (Arith. 98), que pour développer une fraction ordinaire en fraction décimale, il suffit d'ajouter au numérateur autant de zéros qu'on veut avoir de décimales au quotient, et de diviser ensuite le numérateur par le dénominateur, suivant les règles ordinaires. Le quotient qui en résultera sera une série décimale, dont les termes vont en diminuant, selon la progression décuple. Pareillement pour réduire en série une fraction littérale, il faut diviser le numérateur par le dénominateur, et continuer la division à l'infini (24). Le quotient sera composé d'une suite de termes ordonnés, selon les puissances de l'indéterminée, comme on va le voir dans l'exemple suivant :

Soit $\frac{a}{b - x}$, en effectuant la division selon les règles ordinaires, on aura

$$
\begin{array}{l|l}
a & b-x \\
\hline
-a & \dfrac{a}{b}+\dfrac{ax}{b^2}+\dfrac{ax^2}{b^3}+\dfrac{ax^3}{b^4}\ldots\ldots \\
+\dfrac{ax}{b} & \\
-\dfrac{ax}{b}+\dfrac{ax^2}{b^2} & \\
\hline
\quad -\dfrac{ax^2}{b^2}\ \&\text{c.} &
\end{array}
$$

Toute fraction algébrique pourra se développer ainsi par la division, et nous allons faire voir que le quotient sera toujours de la forme suivante.... $A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5+\ldots\ldots$ Les coefficiens A, B, C, D, E, F..., sont des quantités indéterminées qui ne dépendent pas de x; c'est-à-dire qui conservent toujours la même valeur, quelle que soit celle de x. L'objet de la méthode présente, est d'apprendre à determiner ces coefficiens par les règles de l'analyse. *C'est la méthode des coefficiens indéterminés*, donnée par Descartes, méthode qui peut s'appliquer aux développemens en série, toutes les fois qu'on connoît la forme de la série qu'on cherche, et qui est une des plus fécondes et des plus utiles de l'analyse.

Soit 1°. $\dfrac{a}{p+q}$, p étant plus grand que q... On mettra cette fraction sous la forme suivante $\dfrac{a}{p}\left(\dfrac{1}{1+\dfrac{q}{p}}\right)$

On fera $\dfrac{q}{p}=x$, et l'on aura à développer la fraction $\dfrac{a}{p}\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$, x étant plus petit que l'unité.

Soit $\frac{1}{1+x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 \ldots\ldots$

En multipliant les deux membres de l'équation par $1+x$, et transposant l'unité du premier membre dans le second, on a

$$0 = \left.\begin{matrix} A+B \\ -1+A \end{matrix}\right\} x \left.\begin{matrix} +C \\ +B \end{matrix}\right\} x^2 \left.\begin{matrix} +D \\ +C \end{matrix}\right\} x^3 + \ldots\ldots$$

Les termes qui se trouvent dans la même colonne, au-devant de l'accolade, forment le coefficient de chaque puissance de x.

Puisque le premier membre est zéro, il faut que le second devienne aussi zéro; c'est-à-dire que tous ces termes doivent se détruire mutuellement, ou être zéro chacun séparément; mais la valeur des coefficiens $A, B, C, D \ldots$, est indépendante de la valeur de x, car la forme générale de la série ne dépend pas des valeurs particulières de l'indéterminée qui s'y trouve. Donc on ne peut pas supposer que le premier terme est détruit par le second, ou par le troisième, ou... &c. (1). Donc pour que l'équation se vérifie, il faut supposer que le coefficient de chaque terme soit tel, qu'il fasse disparoître le terme : ce qui donnera autant d'équations que de coefficiens à déterminer. On aura donc $A-1=0\ldots$ $A+B=0\ldots$ $B+C=0\ldots$ $C+D=0\ldots\ldots$

La première donne $A=1$, la seconde $B=-1$, la troisième $C=1$, la quatrième $D=-1$, &c.

(1) Si l'on supposoit que le premier terme fût détruit par le second, on auroit l'équation $\left.\begin{matrix} A+B \\ -1+A \end{matrix}\right\} x = 0$, donc les valeurs de A et B dépendroient de x, et par conséquent, chaque valeur donnée à x, donneroit une valeur différente pour A et B, ce qui ne doit pas être.

Donc $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots$ &c.

et $\frac{a}{p+q} = \frac{a}{p}\left\{1 - \frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 - \left(\frac{q}{p}\right)^3 + \left(\frac{q}{p}\right)^4 \ldots\right\}$

Soit 2°. la fraction $\frac{a+b}{p+q+r}$ dans laquelle on a $a > b$, $p > q$, $q > r$.

On fera $\frac{b}{a} = mx$, $\frac{q}{p} = nx$, $\frac{r}{q} = kx^2$, et la fraction proposée prendra la forme suivante, dans laquelle x est plus petit que l'unité $\frac{a}{p}\left(\frac{1+mx}{1+nx+kx^2}\right)$.

Soit donc $\frac{1+mx}{1+nx+kx^2} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots$

En faisant évanouir la fraction, et transposant, on formera l'équation identique :

$$0 = \left.\begin{matrix} A + An \\ -1 + B \\ -m \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} +Ak \\ x + Bn \\ +C \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} +Bk \\ x^2 + Cn \\ +D \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} +Ck \\ x^3 + Dn \\ +E \end{matrix}\right\} x^4 \ldots$$

D'où l'on tire $A = 1 \ldots B = m - n \ldots C = n^2 - mn - k \ldots D = \ldots$ &c. Ces valeurs étant substituées dans la série, donneront le développement de la fraction proposée.

Soit 3°. $\frac{a+b+c}{p+q+r+s}$, dans laquelle on a $a > b$, $b > c$ et $p > q$, $q > r$, $r > s$. On fera comme ci-dessus $\frac{b}{a} = mx$, $\frac{c}{b} = nx^2$, et $\frac{q}{p} = m'x$, $\frac{r}{p} = n'x^2$, $\frac{s}{p} = r'x^3$. On aura donc à développer en série :

$$\frac{1+mx+nx^2}{1+m'x+n'x^2+r'x^3}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots$$

En opérant comme ci-dessus, on aura :

$$o=A+B\left.\begin{matrix} \\ -1+Am' \\ -m\end{matrix}\right\}x\left.\begin{matrix}+C\\+Bm'\\+An'\\-n\end{matrix}\right\}x^3.$$

Egalant à zéro chaque coefficient, on formera les équations nécessaires pour déterminer A, B, C, D...., &c.

Sans pousser plus loin ces exemples, on voit qu'on pourra toujours développer par cette méthode, la fraction $\frac{a+bx+cx^2+dx^3+\ldots\ldots+mx^{n-1}}{a'+b'x+c'x^2+d'x^3+\ldots+m'x^{n-1}+p'x^n}$ en une série, ordonnée suivant les puissances de x.

Dans tous ces développemens, on a supposé que dans le dénominateur la plus haute puissance de x, surpassoit au moins d'une unité la plus haute du numérateur. Si la fraction proposée n'avoit pas cette condition, il seroit facile de l'y ramener, en divisant le numérateur par le dénominateur.

124. On peut appliquer aussi la méthode des coefficiens indéterminés à l'extraction des racines des quantités qui ne sont pas des puissances exactes.

Soit $\sqrt{a^2+x}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots$

En élevant les deux membres au quarré, on aura (59)

$$a^2+x=A^2+2ABx+B^2\left.\begin{matrix}\\+2AC\end{matrix}\right\}x^2\left.\begin{matrix}+2BC\\+2AD\end{matrix}\right\}x^3+\ldots\ (1)$$

(1) En élevant au quarré le polynome $A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots$. on ne prend qu'un nombre de termes égal au nombre des coefficiens qu'on veut déterminer, et l'on néglige les autres; mais il faut avoir grand soin de ne négliger aucun des termes de l'ordre de ceux qu'on considère.

En transposant et ordonnant, on aura $A^2-a^2=0$..; $2AB-1=0$... $B^2+2AC=0$... $2BC+2AD=0$.

ou $A=a$, $B=+\frac{1}{2a}$... $C=\frac{-1}{8a^3}$... $D=\frac{1}{16a^5}$...

Donc $\sqrt{a^2+x}=a+\frac{1}{2a}x-\frac{1}{8a^3}x^2+\frac{1}{16a^5}x^3$...(64)

Soit enfin pour dernier exemple $\frac{1}{\sqrt{a^2+x}}=$ $A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots$. En élevant tout au quarré, on a

$$\frac{1}{a^2+x}=A^2+2ABx+\left.\begin{matrix}2AC\\+B^2\end{matrix}\right\}x^2\left.\begin{matrix}+2BC\\+2AD\end{matrix}\right\}x^3+\ldots$$

Multipliant par a^2+x, et ordonnant les termes, on aura : $A^2a^2-1=0\ldots$ $2ABa^2+A^2=0,\ldots$ $2ACa^2+B^2a^2+2AB=0\ldots$ $2BCa^2+2ADa^2$ $+2AC+2AD=0\ldots\ldots$ &c. Donc $A=\frac{1}{a}$,

$B=-\frac{1}{2a^3}$, $C=\frac{3}{8a^5}$, $D=-\frac{5}{16a^7}\ldots\ldots$

Donc $\frac{1}{\sqrt{a^2+x}}=\frac{1}{a}-\frac{x}{2a^3}+\frac{3x^2}{8a^5}-\frac{5x^3}{16a^7}\ldots\ldots$

125. Ces séries seront toujours convergentes, lorsqu'on aura $x<1$: or on peut toujours faire en sorte que x soit $<.1$; car soit la fraction $\frac{a+bx+cx^2}{m+nx+px^2+qx^3}$. Lorsque x sera >1, on la

changera en celle-ci : $\frac{x^2}{x^3}\left(\frac{c+\frac{b}{x}+\frac{a}{x^2}}{q+\frac{p}{x}+\frac{n}{x^2}+\frac{m}{x^3}}\right)$; on

fera $\frac{1}{x}=z$, et l'on aura $z\left(\frac{c+bz+az^2}{q+pz+nz^2+rz^3}\right)=$ $z\{A+Bz+Cz^2+Dz^3+\ldots$

Or dans cette série $z<1$; donc elle sera nécessairement convergente après avoir déterminé A, B, C, D... On remettra à la place de z sa valeur, et la série première développée sera de la forme suivante :

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x^4}+\ldots \text{ ou } Ax^{-1}+Bx^{-2}+Cx^{-3}\ldots$$

Lorsque les exposans de x vont en augmentant, la série est dite *ascendante*, et lorsqu'ils vont en diminuant, elle est dite *descendante*. On voit donc généralement, que soit que l'indéterminée soit >1, soit qu'elle soit <1, on pourra développer la fraction en série convergente, qui sera descendante dans le premier cas, et ascendante dans le second.

Pour se rendre l'usage de ces fractions familier, nous l'appliquerons à quelques exemples numériques.

Soit proposé de réduire en série convergente la fraction $\frac{30}{9}$. Cette fraction peut se mettre sous la forme suivante : $\frac{3}{1-\frac{1}{10}}$. En la comparant à la formule première (n°. 123), on trouvera que $a=3$, $p=1$, $x=-\frac{1}{10}$....... Donc $\frac{30}{9}=\left(\frac{3}{1-\frac{1}{10}}\right)$ $=3\{1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ldots\}=3{,}333\ldots$ C'est-à-dire que plus on prendra de termes dans le développement de cette fraction, plus la somme approchera de $\frac{30}{9}=3+\frac{1}{3}$. Donc la fraction $\frac{1}{3}$ est la limite de la fraction décimale 0,333... (Arith. 99).

Soit encore la fraction $\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$, qu'on peut mettre sous la forme $\frac{1}{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}}$. En la comparant à la formule 2(123), on a $a = 1 \ldots b = 0 \ldots m = 0 \ldots n = -1 \ldots k = 1 - p = 1 \ldots x = \frac{1}{2} \ldots$. Donc $A = 1 \ldots B = 1 \ldots C = 0 \ldots D = -1 \ldots E = -1$ $F = 0 \ldots G = 1 \ldots H = 1 \ldots$ &c. Et $\frac{1}{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}}$ $= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} \ldots$ En sorte que $\frac{1}{2}$ est encore la limite de cette dernière série.

126. On conçoit, en général, que toutes les fois qu'on développe une expression fractionnaire en série, la somme de tous les termes de la série est égale à la fraction proposée ; mais le nombre des termes de la série est infini ; donc la somme de ceux qu'on considère n'est jamais rigoureusement égale à la fraction proposée. Mais plus on prendra de termes dans la série, plus leur somme approchera de la valeur de la fraction qui sera par conséquent la limite de la série. Ainsi $\frac{a}{a+x}$ est la limite de $1 - \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^3}{a^3} + \frac{x^4}{a^4} \ldots$ lorsque $x < a$, et elle est la limite de $\frac{a}{x} - \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3} - \frac{a^4}{x^4} \ldots$ lorsque $x > a$.

Quoique la quantité puisse croître indéfiniment, cependant toute expression algébrique n'est pas susceptible de parvenir à un degré quelconque de grandeur. Soit, par exemple, $\frac{ax}{a+x} = a - \frac{a^2}{a+x}$. Quelle valeur qu'on donne à x, elle ne sauroit devenir égale à a ; mais elle peut approcher de cette quantité aussi près que l'on voudra. a est donc la

limite des accroissemens de $\frac{ax}{a+x}$ pareillement dans $\frac{x+b}{a}$. Si nous prenons x infiniment petit, la valeur de la fraction approchera de $\frac{b}{a}$, mais ne lui sera rigoureusement égale, que lorsque $x = 0$. $\frac{b}{a}$ est donc la limite des décroissemens de $\frac{x+b}{a}$.

La fraction $\frac{ax+b}{mx+n}$ réunit les deux espèces de limites que nous venons de considérer; car on peut la mettre sous la forme $\frac{a+\frac{b}{x}}{m+\frac{n}{x}}$. Or 1°. plus x sera grande, plus cette expression approche de $\frac{a}{m}$. Donc cette expression est la limite des accroissemens. 2°. Plus x sera petite, plus les termes ax, mx diminueront, et si x étoit zéro, la fraction se réduiroit à $\frac{b}{n}$. Donc cette expression est la limite des décroissemens.

Il importe beaucoup de savoir connoître les limites d'une expression algébrique composée de quantités susceptibles d'accroissemens et de décroissemens. C'est la base du calcul différentiel et intégral.

De la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples.

127. Les fractions rationnelles sont celles qui ne contiennent point de radicaux ou d'exposant fractionnaire dans leur expression, telles, par exemple, que celles que nous venons de considérer. Le dénominateur de ces fractions est le produit de plusieurs facteurs binomes ou trinomes de la forme $a+bx$, ou $a+bx+cx^2$. Or lorsqu'on connoît ces facteurs, il est toujours commode, et souvent nécessaire, de décomposer la fraction proposée en fraction simple. La méthode des coefficiens indéterminés est encore ici d'un grand usage.

Soit proposé la fraction $\frac{a}{a^2x-x^3}=\frac{a}{x(a+x)(a-x)}$.
Je fais $\frac{a}{x(a+x)(a-x)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{a+x}+\frac{C}{a-x}$. En réduisant ces trois fractions au même dénominateur, on trouvera $\frac{A(a^2-x^2)+B(ax-x^2)+C(ax+x^2)}{x(a+x)(a-x)}$ $=\frac{a}{x(a+x)(a-x)}$, les deux dénominateurs étant égaux, les numérateurs doivent l'être ; ce qui donne, en transposant et ordonnant :

$$\begin{array}{l} o=Aa^2+Ba.x-A.x^2 \\ \quad\;\; -a+Ca\;\;\, -B \\ \qquad\qquad\quad\;\; +C \end{array}$$

D'où on tirera $A=\frac{1}{a}$... $B=-\frac{1}{2a}$... $C=\frac{1}{2a}$.

Donc $\frac{a}{x(a+x)(a-x)}=\frac{1}{ax}-\frac{1}{2a(a+x)}+\frac{1}{2a(a-x)}$.

128.

128. Si parmi les facteurs du dénominateur, il s'en trouvoit d'égaux entr'eux, comme dans la fraction $\frac{x^3+x^2+2}{x(x-1)^2(x+1)^2}$, on ne pourroit pas écrire $\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-1}$, parce qu'il est visible que ces deux fractions simples équivalent à une seule $\frac{M}{x-1}$, mais on conserveroit le facteur double $(x-1)^2$ au dénominateur, et on lui donneroit pour numérateur les deux termes $A+Bx$, afin que dans la fraction introduite, le plus haut exposant de x dans le numérateur étant moindre d'une unité que dans le dénominateur, elle soit la plus générale de son espèce. Il en faudra dire autant du facteur $(x+1)^2$.

On fera donc $\frac{x^3+x^2+2}{x(x-1)^2(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{(x-1)^2}+\frac{Dx+E}{(x+1)^2}\ldots$ Réduisant au même dénominateur et transposant, on a

$$0=\left\{\begin{array}{lllll} A.x^4 & +2B.x^3 & -2A.x^2 & +C.x & +A \\ +B & +C. & +B & +E & -2 \\ +D & -2D & +2C & & \\ & +E & +D & & \\ & -1 & -2E & & \\ & & -1 & & \end{array}\right.$$

D'où l'on tire $A=2\ldots$ $B=-\frac{3}{4}\ldots$ $C=\frac{7}{4}\ldots$ $D=-\frac{5}{4}\ldots$ $E=-\frac{7}{4}$. Ainsi la fraction

$$\frac{x^3+x^2+2}{x(x-1)^2(x+1)^2}=\frac{2}{x}+\frac{1}{4}\frac{(7-3x)}{(x-1)^2}-\frac{1}{4}\frac{(5x+7)}{(x+1)^2}.$$

Si la fraction composée avoit au dénominateur

un facteur double de la forme $m+nx+px^2$ dont les deux racines fussent imaginaires, on ne les introduiroit pas dans le calcul, mais on conserveroit le facteur double, en lui donnant un numérateur de la forme $A+Bx$..... Soit donc la fraction $\frac{x^2+x+1}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B+Cx}{x^2+1}$. En opérant comme dans les exemples précédens, on trouvera $A=\frac{3}{2}$... $B=-\frac{1}{2}$... $C=-\frac{1}{2}$. Ce qui change la fraction en celle-ci : $\frac{3}{2(x+1)}-\frac{1}{2}\left(\frac{1+x}{1+x^2}\right)$.

Observations générales sur les différens systêmes de numération.

129. Le principe fondamental de l'arithmétique ordinaire est que chaque chiffre reculé d'un rang vers la gauche, acquiert une valeur dix fois plus forte (Arithm. 14), en sorte que le chiffre du premier rang à droite marque des unités simples; le chiffre du second rang marque des dixaines; celui du troisième rang marque des centaines; celui du quatrième rang marque des mille, et ainsi des autres rangs, croissant toujours selon les puissances successives de 10; d'où il suit que le nombre des unités contenues dans une somme quelconque, est réellement représenté par le produit du premier chiffre multiplié par la puissance zéro de 10: le nombre des dixaines est égal au produit du second chiffre multiplié par la première puissance de 10; le nombre des centaines est égal au produit du troisième chiffre multiplié par la seconde puissance de 10, et ainsi des autres, c'est-à-dire que $3456=3.10^3+4.10^2+5.10^1+6.10^0$. La valeur relative de chaque chiffre tient lieu des puissances

de 10, et par conséquent permet de les supprimer.

On nomme échelle arithmétique, la progression géométrique d'après laquelle se règle la valeur relative des chiffres.

L'échelle de l'arithmétique ordinaire est donc, 1.10.100.1000.10000, et le nombre 10 est la racine de l'échelle.

Si au lieu de prendre pour échelle les différentes puissances de 10, on prenoit les puissances successives d'un autre nombre; par exemple de 7, on auroit un nouveau système de numération composé de sept chiffres, pour exprimer tous les nombres possibles.

Soit donc en général a la racine d'une échelle quelconque, tout nombre N sera désigné par la formule générale $N = Aa^n + Ba^{n-1} + Ca^{n-2} + Da^{n-3} \ldots + Pa^1 + Qa^0 \ldots$, les coefficiens A, B, C, D, exprimant les différens chiffres dont est composé le nombre N, et n le nombre de ces chiffres plus un.

Les questions principales qu'on peut proposer sur les diverses échelles arithmétiques, se réduisent aux suivantes.

130. 1°. L'expression d'un nombre dans une échelle étant donnée, trouver l'expression du même nombre dans une autre échelle dont la racine est donnée (Arith. 22).

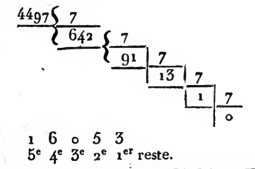
Supposons que la racine de l'échelle connue soit a, la question est réduite à déterminer les coefficiens $A, B, C, D \ldots$. Or il est visible que tous les termes de la formule générale sont divisibles par a, excepté le dernier, donc la valeur de Q sera donnée par le reste de la division par a. Tous les termes du quotient seront encore divisibles par a, excepté le dernier, qui sera la valeur de P. Donc la valeur de P sera donnée par le reste de la

division du premier quotient divisé par a. Tous les termes du second quotient seront nécessairement divisibles par a, excepté le dernier; donc le coefficient de la seconde puissance de a sera donné par le reste de la division du second quotient divisé par a.

En continuant à diviser ainsi les quotiens successifs par la racine de l'échelle, on aura la valeur des autres coefficiens. On peut donc établir la règle suivante:

Divisez le nombre proposé par l'échelle du nouveau systéme, écrivez le reste, ou zéro s'il ne reste rien. Divisez le premier quotient par le même nombre, écrivez le reste à gauche du premier reste que vous avez trouvé; divisez le second quotient par le même nombre; écrivez le reste à gauche du second reste, et ainsi de suite, jusqu'à ce que la division cesse d'être possible, et donne o pour quotient. Par cette opération, vous parviendrez à écrire dans le systéme demandé le nombre écrit dans un autre systéme donné (1).

Exemple. Soit le nombre 4497 exprimé dans l'échelle de 10. Pour l'écrire dans l'échelle de 7, on opérera comme il suit:



(1) Cette manière de résoudre le problême est plus simple et plus directe, que celle qu'on trouve dans les Mémoires de l'Académie, dans Buffon, et l'Encyclopédie méthodique.

Il faut donc cinq chiffres pour exprimer 4497 dans le système de l'échelle de 7, savoir 16053. C'est-à-dire que l'on aura $4497 = 1.7^4 + 6.7^3 + 0.7^2 + 5.7^1 + 3.7^0$... En supprimant les puissances de 7, il ne reste que les coefficiens, et chaque chiffre reculé d'un rang vaut sept fois plus (1).

Réciproquement étant donné un nombre écrit dans un système donné, on peut trouver son expression dans le système ordinaire, en multipliant chaque chiffre du nombre donné par les puissances successives de l'échelle, et faisant l'addition de ces différens produits. Ainsi $1.7^4 = 2401$.... $6.7^3 = 2058$... $0.7^2 = 0$... $5.7^1 = 35$... $3.7^0 = 3$.

Or ces sommes réunies font 4497 liv. Donc le nombre *quatre mille quatre cent nonante-sept*, qui s'écriroit par 16053 dans l'arithmétique de sept chiffres, s'écrira par 4497, dans celle de dix chiffres.

On pourroit aussi résoudre ce problême par la méthode déjà employée, en divisant 16053, par exemple, par dix; mais il faudroit observer que le nombre à diviser étant écrit selon le système de *sept*, il faudroit écrire dix dans le même système, c'est-à-dire 13. Il en seroit de même du quotient. En voici le calcul :

```
16053 { 13
      { 1211 { 13
             {  62 { 13
                   {  4 { 13
                        {  0

4   4   9   7
4e  3e  2e  1er reste.
```

(1) Il faut observer ici que dans le système de 7, ce nombre s'écriroit 10, comme la base du système ordinaire.

131. La formule générale représentant tous les nombres dans un système quelconque de numération, nous fournit une démonstration de la fameuse propriété du nombre 9, qui consiste en ce que si un nombre est divisible par 9, la somme de ses chiffres est aussi divisible par 9. On peut même généraliser la proposition, et démontrer que cette propriété du nombre 9 appartient également au dernier chiffre de toutes les échelles.

Soit en général $N = Aa^n + Ba^{n-1} + Ca^{n-2} + \ldots Pa^1 + Qa^0$.

Si N est divisible par $a-1$, la somme des coefficiens $A+B+C+$ &c., sera aussi divisible par $a-1$.

Car on peut mettre la formule générale sous la forme suivante :

$$N = A(a^n - 1) + B(a^{n-1} - 1) + C(a^{n-2} - 1) + D(a^{n-3} - 1) \ldots + A + B + C + D + \ldots$$

Si N est divisible par $a-1$, le second membre doit l'être aussi. Or $a^n - 1$, $a^{n-1} - 1$, $a^{n-2} - 1 \ldots$ sont chacun divisibles par $a-1 \ldots$ &c. Donc $A+B+C+D$ doit l'être aussi.

Exemple. 1656 étant divisible par 9, $1+6+5+6$ l'est aussi nécessairement, car $1656 = 1.10^3 + 6.10^2 + 5.10^1 + 6.10^0 = 1(10^3 - 1) + 6(10^2 - 1) + 5(10^1 - 1) + 6(10^0 - 1) + 1 + 6 + 5 + 6$. Or les premiers termes sont chacun séparément divisibles par $10 - 1 = 9$; donc $1+6+5+6$ doit l'être aussi.

De plus, si un nombre n'est pas divisible par 9, le reste de la division sera égal à celui qu'on trouvera en divisant par 9 la somme des chiffres qui le composent. Par exemple, 256 divisé par 9, laisse 4 pour reste ; mais $2+5+6=13$ laisse aussi 4. Donc, &c.

132. Ces considérations sur le nombre 9, et sur la manière d'avoir les restes des divisions par 9, peuvent s'étendre aux autres nombres. Car tout nombre dans le système décimal est représenté par la somme de quelques termes de la progression.. 1..10..100..1000..10000... multipliés chacun par un des neuf chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Or, chaque terme de la progression peut être décomposé en un multiple du diviseur qu'on veut employer, plus un reste : donc le reste de la division d'un nombre par un diviseur donné, sera égal à la somme des restes des termes de la progression, chaque reste étant multiplié par le chiffre qui multiplie le terme correspondant.

Soit donc un nombre à diviser par 8 : on peut le représenter généralement par $A 10^n + B 10^{n-1} + C 10^{n-3} + \ldots . P 10^1 + Q 10^0$; ou par $A(10^n - 2^n) + B(10^{n-1} - 2^{n-1}) + C(10^{n-3} - 2^{n-3}) + \ldots\ldots + M(10^2 - 2^2) P(10 - 2) + Q(10^0 - 2^0) + A 2^n + B 2^{n-1} + C.2^{n-3} \ldots . + M.2^2 + P.2^1 + Q \ldots$ Or, par les principes de l'algèbre, les premiers termes sont divisibles par $10 - 2 = 8$; donc, s'il y a un reste, il ne peut être que dans la somme des coefficiens multipliés par les puissances respectives de 2 ; c'est-à-dire dans la somme de $Q + 2P + 4M$ (car les autres puissances de 2 sont des multiples de 8).

Exemple. On demande le reste de 4135 divisé par 8. Ici $Q=5$, $P=3$, $M=1$: on a donc $5 + 2.3 + 4.1 = 15$; et parce que 15 est > 8, je cherche le reste de 15 divisé par 8, en suivant la même méthode; c'est-à-dire que je multiplie 5 par 1, et 1 par 2, la somme $= 7 < 8$; donc 7 est le reste de la division de 4135 par 8. *On aura donc toujours les restes de la division d'un nombre par 8, en prenant la somme du premier chiffre à droite* ×

par 1, plus celle du second × par 2, plus celle du troisième × par 4.

Tout nombre à diviser par 7 peut être mis sous la forme suivante :

$$A(10^n-3^n)+B(10^{n-1}-3^{n-1})+C(10^{n-2}-3^{n-2})\ldots$$
$$+M(10^2-3^2)+P(10-3)+Q(10^0-3^0)+$$
$$A.3^n+B.3^{n-1}+C.3^{n-2}\ldots+M.9+P.3+Q.$$

Les premiers termes étant divisibles par $10-3=7$, s'il y a un reste, il doit être dans la somme des coefficiens multipliés par les restes des puissances successives de 3, divisés par 7.

Or, le reste de 3^0 est 1, le reste de 3^1 est 3, celui de 3^2 est 2, celui de 3^3 est 6, celui de 3^4 est 4, celui de 3^5 est 5, celui de 3^6 est 1, celui de 3^7 est 3... où l'on voit que les mêmes restes reviennent dans le même ordre, et forment des périodes à l'infini, commençant toutes par 1.

133. On peut même démontrer que, quand le diviseur est un nombre premier, les restes des divisions d'une progression géométrique 1, a, a^2, a^3, a^4, a^5... par ce diviseur, formeront toujours de semblables périodes.

Car, 1°. si a n'est pas divisible par ce nombre premier, il est visible qu'aucune puissance de a ne le sera ; donc, en divisant successivement les différentes puissances de a par ce nombre premier, on aura des quotiens à l'infini, avec un reste.

2°. Ce reste ne pourra pas être plus grand ni égal au diviseur : donc, dans la suite des divisions, les restes déjà obtenus se présenteront de nouveau ; et la période ne pourra contenir au plus qu'un nombre de termes égal au diviseur, moins un.

3°. Le premier reste étant 1, le premier chiffre de la seconde période sera aussi 1; car il existe un nombre m tel que $\frac{a^m-1}{D}$ est un nombre entier, D étant un nombre premier (c'est un théorème de Fermat, démontré par Euler, *Mémoires de Pétersbourg*) : donc $\frac{a^m}{D}$ laisse 1 pour reste. Donc les périodes suivantes doivent contenir le chiffre 1 : or ce chiffre doit être à la même place que dans la première période; car du moment qu'il reparoîtra, il doit redonner le même quotient et le même reste que dans la première période, puisque toutes les circonstances du calcul sont rigoureusement les mêmes en effet.

4°. Si $\frac{a^m}{D}$ laisse pour reste 1, a^{m+1} donnera le même reste que $\frac{a}{D}$; car $\frac{a^{m+1}}{D}=\frac{a^m}{D}\times a=a\left(q+\frac{1}{D}\right)=aq+\frac{a}{D}$. Or aq est un entier; donc, s'il y a un reste dans la division, il doit être le même que celui qui résulte de $\frac{a}{D}$.

On prouveroit par le même raisonnement, que le reste de la division de $\frac{a^{m+2}}{D}$ est le même que celui de $\frac{a^2}{D}$...

134. Il suit de ce qui précède que, si on a le nombre 13527541 à diviser par 7, on pourra l'écrire comme il suit, en mettant les restes au-dessous,

chacun sous le chiffre correspondant qui doit le multiplier.........13527541

```
13527541
31546231
--------
       1
      12
      10
      42
       8
      25
       3
       3
     ---
     104
     231
     ---
       4
       0
       2
      --
       6
```

Faisant ensuite les produits partiels, et les ajoutant, on trouvera d'abord 104, qui seroient les restes de la division du nombre donné par 7, si ce reste ne contenoit pas le diviseur. On répétera l'opération sur ce reste, et on trouvera pour second reste 6, qui est le véritable reste de la division dont il s'agit.

On trouveroit par un semblable procédé les restes de la division par 6, en cherchant d'abord les restes de 1, 10, 100, 1000... Divisés par 6, on trouveroit 1, 4, 4, 4... on multiplieroit les chiffres du nombre à diviser par ces restes; on prendroit la somme des produits, et l'on continueroit jusqu'à ce qu'on trouvât une somme plus petite que 6.

135. Prenons pour dernier exemple le diviseur 11.

La formule générale peut se mettre sous la forme

suivante $N=(11-1)^n+B(11-1)^{n-1}+C(11-1)^{n-2}+\ldots+P(11-1)^1+Q$.

Or, dans le développement des binomes $(11-1)^n$, tous les termes, excepté le dernier, seront divisibles par 11 : de plus, le dernier terme des puissances impaires sera nécessairement négatif; donc, si la division par 11 donne un reste, il sera le même que celui qui résultera de la somme de $Q-P+M-\ldots$ &c. c'est-à-dire de la somme des coefficiens, multipliés alternativement par $+1$, -1, en retranchant la somme négative de la somme positive.

Exemple. On demande le reste de la division de 64573 par 11... on fera les deux sommes

$$\begin{array}{r} 3+5+6=14 \\ -7-4=-\ 11 \\ \hline \text{Reste}\ldots\ldots\ldots 3 \end{array}$$

Donc la division du nombre donné par 11, donne 3 pour reste.

136. Comme la division par 9 et par 11 est très-simple, on peut l'employer à servir de preuve à la multiplication et à la division (Arith. 51); car le produit des restes de la division du multiplicande et du multiplicateur par un même nombre, est égal au reste de la division du produit des mêmes nombres par le même diviseur.

Pour le démontrer, soit le multiplicande M, le multiplicateur N, le diviseur commun $=D$, p et q les quotiens, r et s les deux restes. Il est visible qu'on aura $M=pD+r$... $N=qD+s$; donc $MN=pqD^2+psD+qrD+rs$, où l'on voit que tous les termes sont divisibles par D, excepté le dernier rs : donc le reste de la division du produit MN par D, sera le même que celui de rs par le même diviseur. Or, on a des moyens pour connoître rs; donc, lorsque la

multiplication est exacte, le reste du produit, divisé par D, doit s'accorder avec le reste de rs, divisé par D.

Exemple. Soit la multiplication de 347 par 528. $=183216$. Si on se sert du diviseur $9=D$, on trouvera le reste r, en prenant la somme des chiffres du multiplicande; et en retranchant les 9 qu'elle contient (131), on trouvera $r=5$. Par le même procédé, on aura $s=6$; donc $rs=30$, qui, divisé par 9, laisse 3. Le produit traité de même, laisse aussi 3, ce qui est une preuve de l'exactitude de l'opération.

Enoncé de plusieurs problèmes du premier et du second degré, dont on trouvera le résultat dans le tableau suivant.

Problème premier. Une personne interrogée combien elle avoit de jetons dans sa main, répondit que celui qui en auroit la moitié, le tiers, et le quart de ce qu'elle avoit, en auroit 3 de plus qu'elle n'en avoit: quel étoit le nombre de ses jetons?

Problème second. Une armée ayant été défaite, le sixième est resté sur le champ de bataille, 1200 hommes ont été faits prisonniers, et le tiers de l'armée a pris la fuite: on demande le nombre d'hommes qui composoient l'armée?

Problème troisième. Si l'on doubloit le nombre de mes écus, disoit un bonhomme, j'en donnerois 3, ce qui fut fait; on continua de même jusqu'à la troisième fois, qu'il ne lui resta rien: quel étoit le nombre de ses écus?

Problème quatrième. Une personne à qui on avoit demandé quelle heure il étoit, répondit qu'il étoit entre 5 et 6 heures, et que l'aiguille des minutes se trouvoit exactement sur celle des heures: quelle heure étoit-il donc?

Problême cinquième. Deux courriers partent en même temps, l'un de Paris pour Lyon, l'autre de Lyon pour Paris; le premier va quatre fois plus vîte que le second: à quelle distance de Lyon les courriers se rencontreront-ils?

Problême sixième. Les trois-quarts et le sixième d'un vaisseau plongent dans la mer; il reste quatre pieds de bord: quelle est la hauteur du vaisseau?

Problême septième. Un particulier a acheté pour la somme de 260 fr. un lot de bouteilles de vin, composé de 100 bouteilles de vin de Bourgogne et de 80 de vin de Champagne. Un autre particulier a acheté au même prix, pour la somme de 220 fr., 80 bouteilles du premier et 70 du second: on demande combien a coûté la bouteille de chaque espèce de vin?

Problême huitième. Une lettre-de-change de 2000 fr. a été payée en écus de 3 fr. et en piastres de 5 fr.; et il y avoit précisément 450 pièces de monnoie: combien y en avoit-il de chaque espèce?

Problême neuvième. Une certaine somme, placée à intérêt, s'est accrue en 9 mois jusqu'à 3101 fr. 25 cent., et en deux ans et demi elle est devenue 3337 fr. 5 déc.: quelle étoit la somme, et à quel taux étoit l'intérêt?

Problême dixième. Deux ouvriers A et B, travaillant ensemble, ont fait un certain ouvrage en 8 jours; A et C n'ont pu le faire qu'en 9 jours; B et C l'ont fait en 10 jours: on demande combien chacun d'eux, travaillant séparément, mettroit de jours à faire le même ouvrage?

Problême onzième. On demandoit à Pithagore combien de disciples fréquentoient son école; il répondit la moitié étudie les mathématiques, un quart la physique, un septième garde le silence; et il y a

de plus 3 femmes : quel étoit le nombre de ses disciples ?

Problême douzième. Quelle heure est-il, demande-t-on à un géomètre ? il répond que ce qui reste du jour est les quatre tiers des heures déjà écoulées.

Problême treizième. Diophante passa la sixième partie de sa vie dans la jeunesse, et la douzième dans l'adolescence. Après un septième de sa vie et 5 ans, il eut un fils qui mourut après avoir atteint la moitié de l'âge de son père, et ce dernier ne lui survécut que de 4 ans : quel étoit l'âge de Diophante ?

Problême quatorzième. Quelqu'un a deux gobelets d'argent, avec un seul couvercle pour les deux ; le premier gobelet pèse douze décagrammes, et, si on y met le couvercle, il pèse deux fois plus que l'autre gobelet ; mais si l'on couvre le second gobelet, celui-ci pèsera trois fois plus que le premier : on demande le poids du second gobelet et du couvercle ?

Problême quinzième. Une personne a acheté quelques mètres de drap, à raison de 7 écus pour 5 mètres ; elle a revendu le même drap à raison de 11 écus pour 7 mètres, et elle a gagné 100 écus sur le tout : on demande combien il y avoit de drap ?

Problême seizième. Deux personnes doivent 29 pistoles ; elles ont de l'argent toutes les deux, mais pas assez chacune pour pouvoir acquitter cette dette commune. Le premier débiteur dit donc au second : Si vous me donnez les deux tiers de votre argent, je paierai seul la dette ; le second lui réplique qu'il pourroit la payer seul, si l'autre lui donnoit les trois-quarts du sien : on demande combien ils ont d'argent l'un et l'autre ?

Problême dix-septième. Trois frères ont acheté une vigne pour 100 louis ; le plus jeune dit qu'il

pourroit payer seul la vigne, si le second lui donnoit la moitié de l'argent qu'il a ; le second dit qu'il la paieroit seul, si l'aîné lui donnoit le tiers de son argent ; l'aîné ne demande que le quart de l'argent du plus jeune, combien chacun avoit-il d'argent ?

Problême dix-huitième. Deux marchands vendent chacun d'une certaine étoffe ; le second en vend trois mètres de plus que le premier, et ils retirent ensemble 35 écus ; le premier dit au second : J'aurois retiré de votre étoffe 24 écus ; l'autre lui répond : Et moi j'aurois retiré de la vôtre 12 écus et demi : combien chacun a-t-il vendu de mètres ?

Problême dix-neuvième. Un officier se croyant trop foible pour attaquer l'ennemi, prie un autre officier de lui envoyer 20 hommes de son détachement ; mais alors le détachement du premier officier se trouve triple de celui du second : combien de soldats avoit chaque officier ?

Problême vingtième. La somme de 500 fr. ayant été partagée entre quatre personnes, il se trouve que les deux premières ensemble ont eu 285 fr. ; la seconde et la troisième ont eu 220 fr. ; enfin, la troisième et la quatrième 215 fr. ; et de plus, le rapport de la part de la première à celle de la quatrième, est de 4 : 3 : on demande combien chacune a eu ?

Problême vingt-unième. Deux courriers partent en même temps, l'un de Paris pour Orléans, dont la distance est de 15 myriamètres, l'autre d'Orléans pour Paris ; et ils marchent tellement, que le premier arrive à Orléans une heure après avoir rencontré le second, et celui-ci arrive à Paris seize heures après avoir rencontré le premier : on demande quel chemin ils ont fait, chacun en particulier, lorsqu'ils se sont rencontrés ?

Problême vingt-deuxième. Deux lettres-de-change ; la première de 822 fr., payable dans six

mois, et la seconde de 1666 fr., payable dans 9 mois, ont été escomptées ensemble et au même intérêt, pour une somme de 88 fr.: on demande à quel taux étoit l'intérêt?

Problême vingt-troisième. Supposons qu'il y ait 100 mille habitans dans un département, et que la population y augmente tous les ans de la troisième partie : on demande quel sera le nombre des habitans de ce département au bout d'un siècle?

Problême vingt-quatrième. Après avoir tiré un litre de vin d'un tonneau qui contient 100 litres, on le remplace par un litre d'eau; on tire un second litre du même tonneau, que l'on remplace par un litre d'eau : on continue toujours la même opération; et l'on demande quel nombre de litres il faudroit tirer de ce mêlange, pour que le vin qui resteroit dans le tonneau fût la moitié ou le tiers, ou en général la partie m, de celui qui y étoit d'abord.

Problême vingt-cinquième. Un officier voulant récompenser les soldats de sa compagnie, donne 100 fr. au premier, et la centième partie du reste; il donne 99 fr. au second, et la quatre-vingt-dix-neuvième partie du reste; 98 fr. au troisième, et la quatre-vingt-dix-huitième partie du reste; et ainsi des autres jusqu'au dernier, dont la part se trouva être 2 fr. On sait aussi que la part du dernier fut égale à celle du premier, divisée par le nombre des soldats: l'on demande quel étoit ce nombre, et la somme qui leur fut distribuée?

Problême vingt-sixième. Un avare a dans son coffre-fort plusieurs sacs de 100 pistoles. En les comptant un jour, 2 à 2, 3 à 3, 4 à 4, 5 à 5, 6 à 6, il en trouvoit toujours un de reste; les comptant un autre jour 7 à 7, il n'en trouve aucun de reste : ne pourroit-on pas savoir combien il en avoit?

Problême vingt-septième. Un autre comptant ses

ses sacs 2 à 2, il en trouvoit un de reste; les comptant 3 à 3, il en avoit 2 de reste; les comptant 4 à 4, il en avoit 3 de reste; les comptant 5 à 5, il en avoit 4 de reste; les comptant 6 à 6, il en avoit 5 de reste; enfin les comptant 7 à 7, il n'en restoit aucun: combien en avoit-il?

Problême vingt-huitième. Trois femmes ont porté des poires au marché; la première 50, la seconde 30, la troisième 10; elles ont vendu une partie de ces poires le matin, à 3 centimes la poire; elles ont vendu le reste le soir à 7 pour un centime; elles en ont retiré le même argent: comment cela peut-il arriver?

Solutions des problêmes précédens.

N°. 1 36

N°. 2 . . . . 2400 h.

N°. 3 . . . . 2 écus $\frac{5}{8}$

N°. 4 . . . . $27^{l.}\frac{3}{11}$

N°. 5 . . Les courriers se rencontreront après que celui de Paris aura fait les quatre cinquièmes du chemin de Paris à Lyon, ci . . . . $\frac{4}{5}$

N°. 6 48

N°. 7 . . . . 1 liv. le premier, et 2 liv. le second.

N°. 8 . . . . 125 écus, et 325 piastres.

N°. 9 . . . L'intérêt 4, 5 p. $\frac{0}{0}$. Le capital 3000 f.

N°. 10 . . A=14 j. $\frac{34}{49}$... B=17 j. $\frac{23}{41}$... C=23 j. $\frac{7}{31}$.

N°. 11 28

N°. 12 . . . . 10 h. 17 m. $\frac{1}{7}$

N°. 13 84

N°. 14 . . Le couvercle pèse 20 d. g. et le second gobelet 16.

N°. 15 . . . . $583\frac{1}{3}$ mèt.

N°. 16 . . Le 1er avoit 19 pistoles $\frac{1}{3}$, le 2e $14\frac{1}{2}$.

N°. 17 . . L'aîné avoit 84 louis, le second, 72 l.; le troisième, 64 l.

N°. 18 . . Le premier marchand avoit 15 mètres, et le second 18; ou le premier marchand avoit 5 mètres, et le second 8.

N°. 19 . . Ce problême est indéterminé, et par conséquent susceptible de plusieurs solutions. La plus simple est un soldat pour le premier officier, et 21 pour le second.

N°. 20 . . La première a eu 160 fr., la 2ᵉ 125 fr., la 3ᵉ 95 fr., la 4ᵉ 120 fr.

N°. 21 . . Le premier a fait 12 myriamètres, et le second en a fait 3.

N°. 22 . . . . L'intérêt est à 5,5 p. $\frac{o}{o}$.

N°. 23 . . . . 2654874 habitans.

N°. 24 . . Il faut en tirer un peu moins de 69 litres.

N°. 25 . . Cet officier avoit 100 soldats dans sa compagnie, ou 99..... La somme qu'il leur distribua étoit 10100 fr., ou 9900 fr.

N°. 25 . . Le problême est susceptible de plusieurs solutions. Le plus petit nombre qui satisfait est 301; les autres nombres croîtront progressivement de 420.

N°. 27 . . Problême indéterminé, susceptible de plusieurs solutions. Une de ces solutions est 539. Les autres nombres croîtront progressivement de 420.

N°. 28 . . Problême indéterminé, mais qui n'est susceptible que d'une solution. La première en a vendu 1 le matin, et 49 le soir; la seconde en a vendu 2 le matin, et 28 le soir; la troisième en a vendu 3 le matin, et 7 le soir.

FIN.

TABLE.

PREMIÈRE PARTIE.

X 2

SECONDE PARTIE.

FIN DE LA TABLE.

A PARIS, DE L'IMPRIMERIE DE CRAPELET.

NOTICE ABRÉGÉE

Des Livres de fonds et d'assortiment qui se trouvent à Paris, chez DUPRAT, *Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins.*

MÉCANIQUE analytique, par *J. L. Lagrange*, *in-4*. 13 fr.
Théorie des fonctions analytiques, par le même, *in-4*. 5 fr.
De la résolution des équations numériques, par le même, *in-4*. 9 fr.
Essai sur la Théorie des Nombres, par *A. M. Legendre*, in-4. 18 fr.
Mémoire sur les Transcendantes elliptiques, par le même, *in-4*. 6 fr.
Élémens de Géométrie, par le même, *in-8*. 5 fr.
Exposition du Système du Monde, par *P. S. Laplace*, 2 vol. *in-8*. 10 fr.
Traité de Mécanique céleste, par le même, *sous presse*.
Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral, par *S. F. Lacroix*, 2 vol. *in-4*. 33 fr.
Le Traité des Différences et des Séries, *qui sert d'appendice à l'ouvrage précédent, est sous presse.*
Essais de Géométrie sur les plans et les surfaces courbes, ou Élémens de Géométrie descriptive, par le même. 2 fr. 5 déc.
Élémens d'Algèbre de Clairaut, cinquième édition, avec un Supplément, par le même, 2 vol. *in-8*. 10 fr.
Traité de Trigonométrie rectiligne et sphérique, et d'application de l'Algèbre à la Géométrie, par le même, *in-8*. 4 fr.
Leçons élémentaires d'Arithmétique et d'Algèbre, par *P. Tedenat*, *in-8*. 4 fr.
L'Arithmétique se vend séparément, 2 fr. 5 déc.
Géométrie du compas, par *L. Mascheroni*, ouvrage traduit de l'italien, *in-8*. 5 fr.
Isaaci Newtoni Enumeratio Linearum tertii ordinis; sequitur illustratio ejusd. tractatûs auct. *J. Stirling*, *in-8*. 7 fr. 5 déc.
Principiorum Calculi differentialis et integralis expositio elementaris, auct. *S. L'huillier*, *in-4*. 14 fr.
Mélanges mathématiques, par *Nieuport*, *in-4*. 12 fr.
Essai sur les ouvrages Physico-Mathématiques de Léonard de Vinci, avec des fragmens tirés de ses manuscrits apportés de l'Italie, par *J. B. Venturi*. 2 fr. 5 déc.
Traité élémentaire de Mathématiques pures, par *E. M. J. Lemoine*, (d'Essoies), troisième édition, 2 vol. *in-8*. 9 fr.
Traité de Mécanique, par *Marie*, *in-4*. 12 fr.
Hydrographie démontrée et appliquée à toutes les parties du pilotage, à l'usage des Élèves ou Aspirans de la Marine militaire ou marchande, par *Lassale*, *in-8*. 6 fr.
Réflexions sur la Métaphysique du Calcul infinitésimal, par *Carnot*, *in-8*. *fig.* 1 fr. 8 déc.
Essai sur les Machines en général, par le même, *in-8*. 2 fr. 5 déc.
Introductio in Analysin infinitorum, auct. *L. Eulero*, 2 vol. *in-4*. 24 fr.
Tables portatives des Logarithmes, par *Callet*, édition stéréotype de *Firmin Didot*, *in-8*. rel. 14 fr.
Histoire des Mathématiques, par *Montucla*, 2 vol. *in-4*. 60 fr.

Traité analytique des mouvemens apparens des Corps célestes, par *Dionis du Séjour*, 2 vol. *in*-4. 48 fr.
Tables de Jupiter et de Saturne, déduites du principe de la pesanteur universelle, suivant la théorie de *Laplace*, et des meilleures observations faites sur-tout depuis un siècle, par *Delambre*, *in*-4. 6 fr.
Voyage astronomique et géographique dans l'État de l'Église, pour mesurer deux degrés du méridien, par les PP. *Maire* et *Boscovich*, *in*-4. 12 fr.
Astronomie, par *J. Lalande*, 3 vol. *in*-4. 60 fr.
Abrégé d'astronomie, par le même, *in*-8. 5 fr.
Nouvelle Architecture hydraulique, par *Prony*, 2 vol. *in*-4. 60 fr.
Exposition d'une Méthode pour construire les Équations indéterminées, qui se rapportent aux sections coniques, par le même, *in*-4. 3 fr. 5 déc.
Veteres Mathematici, *in-fol.* 100 fr.
Traité analytique de la résistance des Solides et des Solides d'égale résistance, par *Girard*, *in*-4. 13 fr.
Œuvres de *Blaise Pascal*, 5 vol. *in*-8. 24 fr.
Pinacothèque, ou Collection de Tables, par *Gruson.* 10 fr.
Traité de Trigonométrie, par *Cagnoli*, *in*-4. 13 fr.
Elementi d'Algebra di *Pietro Paoli*, 2 vol. *in*-4. 21 fr.
Teoria dell' analisi da servire d'introduzione al metodo diretto ed inverso de' limiti, opera del sig. *Franchini*, 3 vol. *in*-8. 15 fr.
De Calculo integralium exercitatio Mathematica, auct. *P. Ferroni*, *in*-4. 15 fr.
Ejusd. Magnitudinum exponentialium, Logarithmorum et Trigonometriæ sublimis theoria novâ methodo pertractata, *in*-4. 24 fr.
Essai sur l'application de l'Analyse aux probabilités des décisions rendues à la pluralité des voix, par *Condorcet*, *in*-4. 15 fr.
Cours de Mathématiques à l'usage de la Marine, par *Bézout*, 6 vol. *in*-8. 22 fr.
Cours de Mathématiques à l'usage de l'Artillerie, par le même, 4 vol. *in*-8. grand papier. 24 fr.
Théorie générale des Équations algébriques, par le même, *in*-4. 18 fr.
Cours de Mathématiques, par *Ch. Bossut*, 3 vol. *in*-8. 15 fr.
Traité théorique et expérimental d'Hydrodynamique, par le même, 2 vol. *in*-8. 10 fr.
Traités de Calcul différentiel et de Calcul intégral, par le même, 2 vol. *in*-8. 12 fr.
Introduction à l'analyse des Lignes courbes algébriques, par *Gabriel Cramer*, *in*-4. 48 fr.
Élémens de Géométrie, par *Clairaut*, *in*-8. 5 fr.
Théorie de la Lune, par le même, *in*-4. 9 fr.
Théorie de la figure de la Terre, par le même, 24 fr.
Recherches sur les Courbes à double courbure, par le même, *in*-4. 15 fr.
Description et usage d'un nouveau Cercle de Réflexion, par *Borda*, *in*-4. 4 fr. 5 déc.
Supplément à la Trigonométrie sphérique et à la Navigation de Bézout, par *Callet*, *in*-4. 3 fr. 6 déc.
Élémens d'Arithmétique, d'Algèbre et de Geométrie, par *Mazéas*, *in*-8. 5 fr.
Traité de l'Aurore boréale, par *Mairan*, *in*-4. 12 fr.

Le même Libraire tient un assortiment de Livres anciens et rares concernant la Géométrie, la Mécanique et l'Astronomie.

